# TD n°3 : potentiel électrique

**Exercice 1**

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{grad} f$ où $f$ est le champ scalaire suivant :
   a. $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$
   b. $f(x, y, z) = xyz.sin(xy)$

$$f(x,y,z) \quad , \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{dl}$$

avec

$$\overrightarrow{grad} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \quad \text{en coord. cartésiennes}$$

a) $f(x,y,z) = xy^2 - yz^2$

$$\overrightarrow{grad} f = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1\, y^2 - 0 = y^2 \quad \text{car} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z \text{ constants}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x \times 2y - 1 \times z^2 = 2xy - z^2 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 - y \times 2z = -2yz \end{vmatrix}$$

b) $f(x,y,z) = xyz \sin(xy)$

$$\overrightarrow{grad} f = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 \times y \times z \sin(xy) + xyz \times (y) \times \cos(xy) = yz \sin(xy) + xy^2z \cos(xy) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x \times 1 \times z \sin(xy) + xyz \times (x) \cos(xy) = xz \sin(xy) + yx^2z \cos(xy) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = xy \times 1 \times \sin(xy) = xy \sin(xy) \end{vmatrix}$$

## Exercice 2

On donne le champ scalaire $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calculer $\overrightarrow{grad} f$.

coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z \end{array} \right. = 2 \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. = 2\overrightarrow{OM}$$

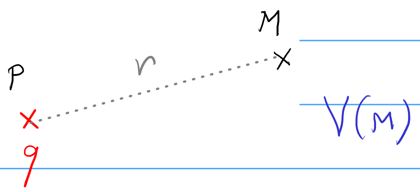
on peut écrire $f(x,y,z) = r^2 = f(r)$ en sphérique

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} = 2r \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. = 2r\vec{u}_r = 2\overrightarrow{OM}$$

### Exercice 3

Le potentiel créé par une charge ponctuelle en un point $M$, situé à la distance $r$ de la charge $q$ est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = V(r)$$

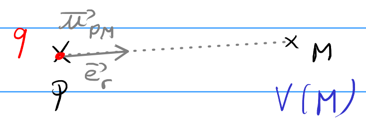



Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ qui dérive du potentiel $V$.

- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ par définition

  système de coordonnées cylindriques ou sphériques

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \left| \begin{array}{l} -\left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{r^2}\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\[2ex] -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0 \end{array} \right.$$



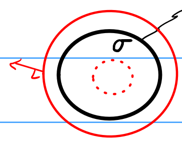

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{u}_{PM}$$

loi de Coulomb

à l'$\infty$ : pas de charges $\Rightarrow V(\infty) = 0$

**Exercice 6**

Reprendre l'exercice **8** du TD2 de la sphère chargée uniformément en surface de densité $\sigma$ et calculer le potentiel engendré par une telle distribution en tout point de l'espace.




$r < R$ : $q_{int} = 0$ | $r > R$ : $q_{int} = Q = 4\pi R^2 \sigma$

$E_1 = 0$ | $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^2}{r^2}\right)$

$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

discontinuité à la traversée de la surface chargée

Calcul du potentiel V :

coordonnées sphériques : $d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr & (\vec{u}_r) \\ r\,d\theta & (\vec{u}_\theta) \\ r\sin\theta\,d\varphi & (\vec{u}_\varphi) \end{vmatrix}$

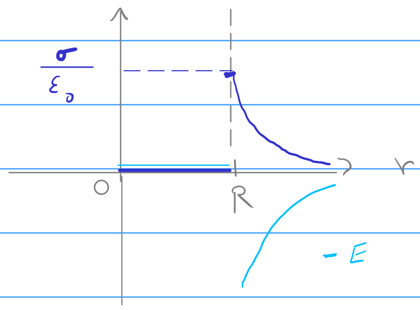
Potentiel V est donné par : $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$ avec $V(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$ ?

$$-\vec{grad}\,V = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{dV(r)}{dr} = E(r) & (\vec{u}_r) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 & (\vec{u}_\theta) \\ -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 & (\vec{u}_\varphi) \end{vmatrix}$$

car $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

$\Rightarrow V(r)$

$$\Rightarrow \left(\frac{dV(r)}{dr}\right) = -E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^2}{r^2}\right) & (r > R) \end{cases}$$




$$V(r) = -\int_0^r E(r)\,dr \qquad \forall r$$

⚠ constante d'intégration

$\longleftrightarrow$ V défini à une constante près

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, le potentiel électrique est défini sur la surface chargée et il est continu à la traversée de la surface: $V(r = R^-) = V(r = R^+)$

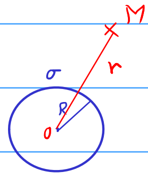
Condition de continuité $\Longrightarrow$ on trouve la "constante près"

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = -E(r) = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^2}{r^2}\right) & (r > R) \end{cases}$$

• $r < R$ : $\dfrac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow V(r < R) = \displaystyle\int_0^R 0\,dr = K_1$

$r > R$ : $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r^2}$

$$V(r>R) = \int_{R} \overbrace{\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}}^{\text{constante}} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} + K_2$$




. sphère chargée

. $r \gg R$ : sphère chargée $\approx$ charge ponctuelle

$\vec{E}$ radial ☺

① condition de continuité : $V(r=R^+) = V(r=R^-)$

$$\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{R} + K_2 = K_1$$

$\Rightarrow \; K_1 = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} + K_2$ donc

. $r \to \infty$ : sphère chargée isolée

$E(\infty) = 0$ et $V(\infty) = 0$

$$\boxed{V(r) = \begin{cases} V(r) = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) R + K_2 & (r \leq R) \\ V(r) = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \dfrac{R^2}{r} + K_2 & (r \geq R) \end{cases}}$$

$\Leftarrow V(r \to \infty) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$

Remarque : . $V(r \to \infty) = 0$ ou

. charge ponctuelle $q$ : $V(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r} + V_0$

analyse dimensionnelle :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad [V] = [E \times r] = [E] \times L = \left(\frac{[q]}{[\varepsilon_0][r^2]}\right) \times L = \frac{[\sigma\, dS]\, L}{[\varepsilon_0]\, L^2} = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon_0]} \times L$$

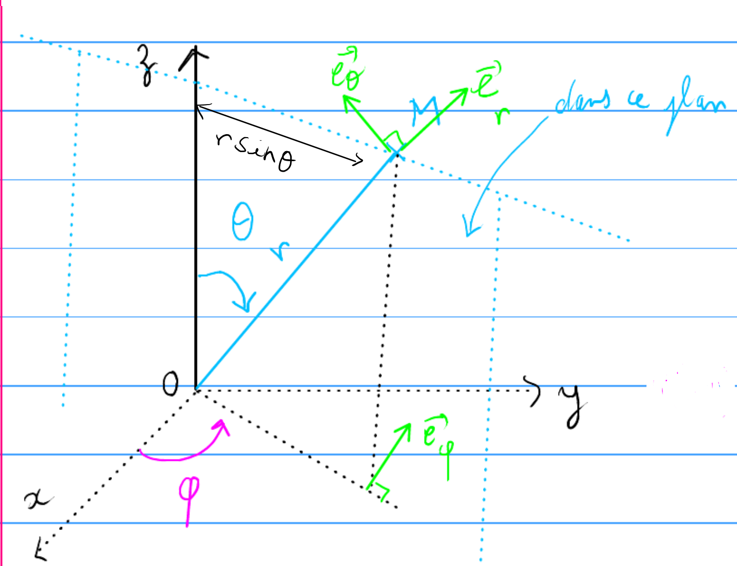
---

**Exercice 4** – Symétrie axiale *

Un champ de vecteur $\vec{E}$ dérive d'un potentiel $V$ qui a la symétrie de révolution autour de l'axe $(Oz)$. On se place dans un plan contenant l'axe $(Oz)$. Dans ce plan, on adopte les coordonnées polaires, et l'on pose $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$. Le potentiel $V$ a alors pour expression :

$$\hookrightarrow V = \left(\frac{K}{r^3}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

Déterminer les composantes du champ $\vec{E}$.




. $\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM}) \Rightarrow$ coordonnées sphériques

ici $V(r, \theta, \cancel{\varphi}) = \left(\dfrac{K}{r^3}\right)(3\cos^2\theta - 1)$

. $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V =$

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\, d\theta \\ r \sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\frac{d}{dr}(r^n) = n r^{n-1}$$

dans ce plan : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -K \dfrac{d\left(\overbrace{\frac{1}{r^3}}^{r^{-3}}\right)}{dr}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{K}{r^3}\left(3\dfrac{d(\cos^2\theta)}{d\theta} - 0\right) \end{array} \right.$

cf. $V(r,\theta) = \dfrac{K}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{ll} -K(-3)\, r^{-4}\left(3\cos^2\theta - 1\right) = \left(\dfrac{3K}{r^4}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right) & (\vec{e}_r) \\ -\dfrac{K}{r^4}\left(3 \times 2(-\sin\theta)\cos\theta\right) = \left(\dfrac{3K}{r^4}\right)\left(2\sin\theta\cos\theta\right) & (\vec{e}_\theta) \end{array} \right.$$

rq : $[V] = [E] \times L$ donc $[E] = \dfrac{[V]}{L}$

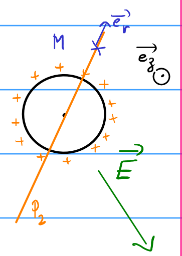
---

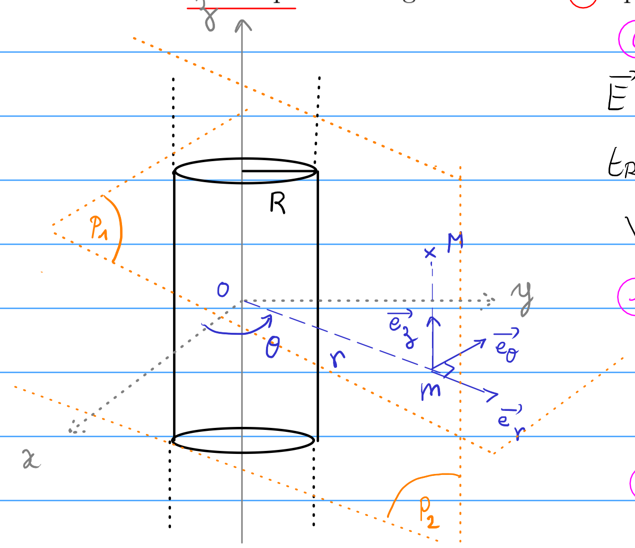
**Exercice 5** – Symétrie cylindrique

Soit un cylindre de rayon $R$ et de hauteur infinie. Déterminer le potentiel électrostatique créé par la distribution surfacique de charges de densité $\sigma$ répartie uniformément dans ce cylindre.

par définition

$\sigma \hat{=} \dfrac{dq}{dS}$




⓪ Définition et continuité :

$\vec{E}$ : défini et continu partout sauf à la traversée de la surface chargée ;

V : défini et continu partout même sur surface chargée

① choix du système de coordonnées :

$\{O ; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)\} \longrightarrow \vec{E}(r,\theta,z)$ ?

② Invariances : $\longrightarrow \vec{E}(r)$ car

$\infty$ selon $Oz \Rightarrow$ distribution de charges invariante par translation selon $\vec{e}_z$ : $\vec{E}(r,\theta,\cancel{z})$

uniformément chargé $\Rightarrow$ " " " " " rotation autour de $Oz$ : $\vec{E}(r,\cancel{\theta},z)$

③ symétries : $\vec{E} \in$ plan de symétrie $(\Pi)$ et $\vec{E} \perp$ plan d'antisymétrie $(\Pi')$

↳ $P_1 = (M ; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ plan de symétrie : $\vec{E} \in P_1$

↳ $P = \cancel{(M, \vec{e}_z, \vec{e}_\theta)}$ « découpe » pas la distribution de charges ⚠

↳ $P_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plan de symétrie : $\vec{E} \in P_2$

$\Big\}\ \vec{E} \in (P_1 \cup P_2)$

$\downarrow$

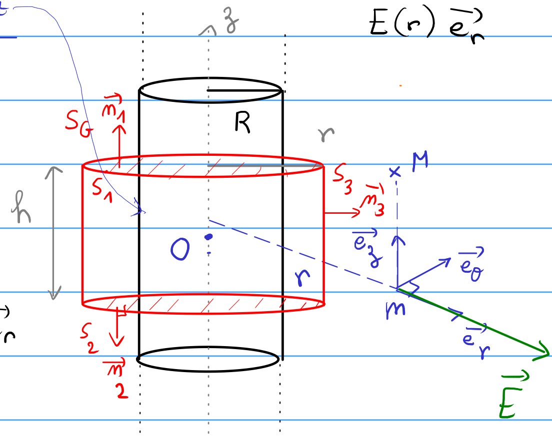
$\vec{E} = E\, \vec{e}_r = E(r)\, \vec{e}_r$ $\quad \vec{E}$ radial

## ④ Théorème de Gauss :

ⓐ <u>surface de Gauss</u> : $S_G$ surface fermée incluant tout ou une portion de la distribution de charges

$S_G$ : cylindre (fermé) de hauteur $h$ et de rayon $r$

ⓑ <u>Théorème de Gauss</u> $\quad \Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$




$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \underbrace{\vec{E}\cdot dS_1\vec{n_1}}_{=0} + \iint_{S_2} \underbrace{\vec{E}\cdot dS_2\vec{n_2}}_{0} + \iint_{S_3} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{dS_3}}_{\neq 0}$$

$$= \oiint_{S_G} E(r)\,\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{dS}}_{dS_r} \qquad \vec{dS_3} = dS_3\,\vec{e_r}$$

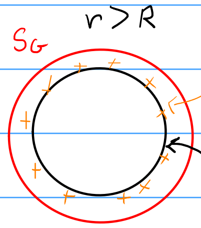
$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \rightarrow \vec{dS} = \begin{vmatrix} r\,d\theta\,dz = dS_r \\ dr\,dz = dS_\theta \\ r\,dr\,d\theta = dS_z \end{vmatrix}$$

$$\underline{\Phi(\vec{E})} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(r)\,r\,d\theta\,dz = E(r)\,r\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} dz = \underbrace{2\pi h\,r}_{S_3}\,E(r)$$

à r fixé

ⓒ <u>$q_{int}$</u> :

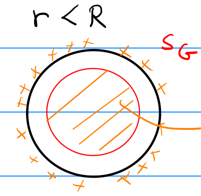
r > R




$q_{int} = Q$

charge totale sur la surface chargée

r < R




$q_{int} = 0$

$$Q = \iint_{S_G} dq \underset{\text{uniforme}}{=} \iint_{S_G} \sigma\,dS = \sigma \iint dS = \sigma \times 2\pi R h$$

$S_G$ de hauteur $h$ et rayon $R$

$$[E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon_0]} = \frac{[q]}{L^2}\frac{1}{[\varepsilon_0]}$$

donc : ↳ <u>$r < R$</u> : $\vec{E} = E(r<R)\,\vec{e_r} = \vec{0}$

↳ <u>$r > R$</u> : $\vec{E} = E(r>R)\,\vec{e_r} = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R}{r}\right)\vec{e_r}$ ☺

$$\Phi(\vec{E}) = \cancel{2\pi}\, r\,\cancel{h}\,E(r) = \frac{\sigma\,\cancel{2\pi}\,R\,\cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

## ⑤ Potentiel électrique : ↳ symétrie cylindrique : coord. cylindriques

↳ distribution surfacique $\sigma \Rightarrow V$ défini continu partout même sur la surface

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = \left| \begin{array}{l} E(r<R)\,\vec{e}_r = \vec{0} \\ E(r>R)\,\vec{e}_r = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R}{r}\right)\vec{e}_r \end{array} \right.$$

donc
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{dV(r)}{dr} & (\vec{e}_r) \\ -\dfrac{\partial V}{r\,\partial \theta} = 0 & (\vec{e}_\theta) \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 & (\vec{e}_z) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow V(r)$ indépendant de $\theta$ et $z$

car $dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \vec{dl}$ donc ici :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = \begin{cases} 0 & (r<R) \quad (1) \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{r}\right) & (r>R) \quad (2) \end{cases}$$

et 2 conditions limites : $V(R^+) = V(R^-)$

⚠ $V(r \to \infty) \neq 0$ car il y a des charges à l'infini (cylindre chargé de hauteur infinie)

(1) $0<r<R$ : $\dfrac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow V(r) = K_1$ constante

(2) $r>R$ : $\dfrac{dV}{dr} = -\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R}{r}\right) \Leftrightarrow V(r) = -\displaystyle\int_R^r \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R}{u}\right) du + K_2$

constante

(*) $$V(r) = -\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)\left(\int_R^r \frac{du}{u}\right) = -\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)\underbrace{\Big[\ln(u)\Big]_R^r}_{(\ln(r)-\ln(R)) = \ln\left(\frac{r}{R}\right)} + K_2$$

$$= +\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right)\ln\left(\frac{R}{r}\right) + K_2$$

sinon $V(r=R) = 0$ si pas de $K_2$ ⚠

ou sans préciser les bornes : $V(r) = \left(-\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \int \frac{du}{u} = -\left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \ln r + K_2$ (**)

continuité à la surface : $V(R^-) = V(R^+)$ ou $V(r = R^-) = V(r = R^+)$

$$(*) \quad K_1 = \left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \underbrace{\ln\left(\frac{R}{R}\right)}_{\ln 1 = 0} + K_2 = K_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} V(r \leq R) &= K_1 \\ V(r \geq R) &= \left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \ln\left(\frac{R}{r}\right) + K_1 \end{aligned}}$$

il reste une constante $K_1$ car il n'y a qu'une condition limite en $r = R$.

ou (**) : $V(r = R^-) = V(r = R^+)$ continuité à la surface

$$K_1 = K_2 + \left(-\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \ln(R)$$

↳ $K_2 = K_1 + \left(\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \ln R$, il ne reste qu'une constante d'intégration.

$$\boxed{\begin{aligned} V(r \leq R) &= K_1 \\ V(r \geq R) &= K_1 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}(\ln R - \ln r) = K_1 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \end{aligned}}$$