TD 2-B Série de fonctions Gr 4.

Exercice 1

soit $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x e^{-nx^2}.$$

1/ Etudions la convergence simple et absolue de la série de fct $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

$$u_n \longrightarrow 0 \;\not\Longrightarrow\; \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ CV.}$$

$$u_n \not\rightarrow 0 \;\Longrightarrow\; \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ dV}$$

soit $x \in \mathbb{R}$

- pour $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \Longrightarrow \sum_n f_n(0)$ converge vers 0.
  et cva
- pour $x \neq 0$

$1^{ière}$ méthode

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} n^2 x e^{-nx^2} = 0$$

d'après le lemme de Riemann $\sum_n f_n(x)$ cv

$(\alpha = 2 > 1)$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$2^{ième}$ méthode

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x e^{-(n+1)x^2}}{x e^{-nx^2}} \right| = e^{-x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x^2} < 1$$

D'après la règle de D'Alembert la série

$\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge donc $\sum_n f_n(x)$ cva

$\forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ cv.

$3^{ième}$ méthode

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = (|x|)^{1/n} e^{-x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x^2} < 1$$

d'après la règle de Cauchy la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$

converge $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ cva

$\forall x \in \mathbb{R}$, par suite $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge.

Conclusion

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ cv et cva

donc

$\sum_n f_n$ cvs sur $\mathbb{R}$ et cva sur $\mathbb{R}$.

1ième méthode

On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x e^{-kx^2}$

. pour $x = 0$, $S_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

. pour $x \neq 0$ $|e^{-x^2}| < 1 \Rightarrow (e^{-x^2})^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$S_n(x) = x \cdot \frac{1-(e^{-x^2})^{n+1}}{1-e^{-x^2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-e^{-x^2}}.$$

La série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fct S sur $\mathbb{R}$ avec

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{1-e^{-x^2}} & \end{cases}$$

S n'est pas continue en 0

$$\left(= \frac{x}{1-\left(1+x^2/2+o(x^2)\right)} = \frac{x}{x+o(x)} \xrightarrow[x\to 0^{\pm}]{} \pm\infty \right)$$

Remarque

- $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- $(S_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} S$

∘ S n'est pas continue en 0

donc $(S_n) \underset{\mathbb{R}}{\overset{cvu}{\not\to}} S \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

2/ Déf { La série $\sum f_n$ cvn sur $\mathbb{R}$ ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$ cv

$\boxed{\text{Pour montrer que } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}}$, on montre que

La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ diverge ou $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ diverge

$$f_n(x) = x\, e^{-nx^2}$$

on prend $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f_n(x_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1}$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

Donc $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ est une série numérique divergente. On déduit alors que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ montrons que $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVN sur $]-\infty, -a] \cup [a; +\infty[$.

$\left[\text{Pour montrer que } \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ CVN sur } I\right]$, on montre :

La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ CV

on trouve $(u_n)_n$ une suite tq : $\forall x \in I$

$$\begin{cases} |f_n(x)| \leqslant u_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ CV} \end{cases}$$

Soit $x \in]-\infty, -a] \cup [a; +\infty[$

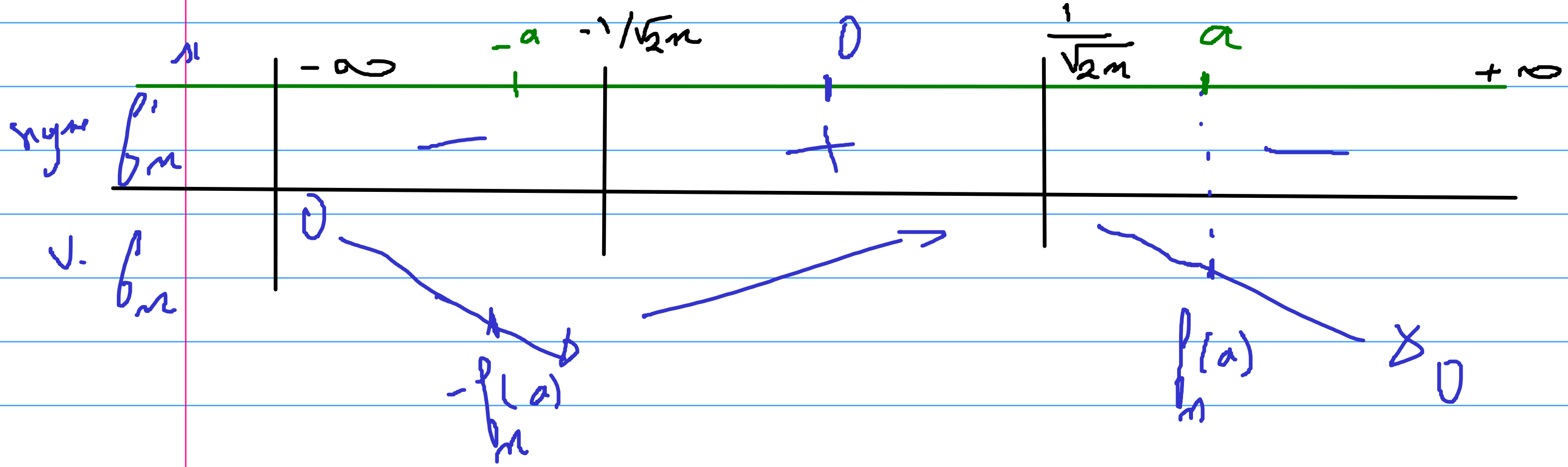
$f_n(x) = x e^{-nx^2}$ $\quad f_n'(x) = (1 - 2nx^2) e^{-nx^2}$

$$f_n'(x) = 0 \iff 1 - 2n x^2 = 0$$

$$\iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$\frac{1}{\sqrt{2n}} < a$



$$\sup_{x \in]-\infty, -a] \cup [a ; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = a e^{-n a^2}$$

On a $\sum_{n \geq 0} a e^{-n a^2}$ est une série convergente car $\lim_{n \to +\infty} n^2 a e^{-n a^2} = 0$

(Lemme de Riemann $\alpha = 2$)

On a alors $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ CV $\Longrightarrow \sum_{n \geq 0} f_n$ CVN

sur $]-\infty, -a] \cup [a ; +\infty[$, $\forall a > 0$

3) f_a CVN $\Rightarrow$ CNU

donc

$\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $]-\infty,-a] \cup [a;+\infty[$

$\forall a > 0$

d'où $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}^*$.

. On sait que la série $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$

SSI: $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ et $(R_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} R\equiv 0$

$(R_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{\overset{?}{CVU}} R\equiv 0$ Non

soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x).$$

$$\forall k \in [n+1, \; 2n]$$

$$-k \geq -2n.$$

$$\Rightarrow \quad e^{-kx^2} \geq e^{-2n x^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\, e^{-kx^2} \geq x\, e^{-2n x^2}$$

$$\Rightarrow \quad f_k(x) \geq f_{2n}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \geq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} x\, e^{-2n x^2}}_{n.\, x\, e^{-2n x^2}}$$

Donc

$$\Rightarrow \quad R_n(x) \geq n\, x\, e^{-2n x^2}$$

prenons $x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ on a :

$$R_n(x_1) \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2} = \sqrt{n}\, e^{-2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

or $\|R_n\|_\infty \geqslant |R_n(x_0)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

on peut déduire alors la non convergence uniforme de la suite de fcts $(R_n)_n$ vers la fct nulle sur $\mathbb{R}$.

d'où $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 soit $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$$

1/ CVS et CVA de la série de fcts

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

soit $x \in \mathbb{R}$,

$$n^2 |f_n(x)| = n^2 |x| e^{-n\ln(1+x^2)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'après le Lemme de Riemann $(\alpha = 2)$

la série numérique $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ cv

pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la

série de fcts $\sum_{n \geq 0} f_n$ cva sur $\mathbb{R}$

la cva $\Rightarrow$ la cvs donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ cvs sur $\mathbb{R}$

<u>Rq</u> $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{1+x^2} \right)^k$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+x^2}} & x \neq 0 \\ \quad \text{"} \\ \dfrac{x(1+x^2)}{2+x^2} & \end{cases}$$

2/ $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. $x \in \mathbb{R}_+$

pour $x = 0$, $R_n(x) = 0$

pour $x \neq 0$

$$R_n(x) = x \, \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \dfrac{-1}{1+x^2}} = \frac{(-1)^{n+1} \, x}{(1+x^2)^n (2+x^2)}$$

$2+x^2 \geq 1+x^2$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \cdot \frac{1}{2+x^2} \leq \frac{|x|}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$g_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \qquad g_n'(x) = \frac{(1+x^2)^{n+1} - 2(n+1)x^2 (1+x^2)^n}{}$$

$$= \frac{1+x^2 - 2(n+1)x^2}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{1-(2n+1)x^2}{(1+x^2)^{n+2}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$		$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$		$+\infty$
signe de g_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
v.g.	0	$\searrow$	$-g\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$	$\nearrow$	$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$	$\searrow$	0

$$\|g_n\|_\infty = \frac{1}{(2n+1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{n+1}}$$

$$\|g_n\|_\infty = \underbrace{\frac{1}{(2n+1)^{1/2}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{e^{-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}}_{\substack{\downarrow \\ e^{-1/2}}}$$

$n \to +\infty$

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \|g_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $(R_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU}$ fct nulle (fct impaire)

Par suite $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.

3/ la CVN de $\sum_n f_n$? soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$h_n(x) = |f_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right|$$

$$h_n'(x) = \frac{(1+x^2)^n - 2nx^2(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}}$$

$\forall n \geqslant 1$

>0

$$= \frac{x^2+1-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-\overbrace{(2n-1)}x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$		$+\infty$
signe de f_n'		$-$		$+$		$+$		$-$	
V. f_n	0	$\searrow$	$-f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n}$$

$$\|f_n\|_\infty = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}} \underbrace{e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)}}$$

$$0 < \|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n-1}} > 0$$

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^{1/2}}$ diverge $(\alpha = 1/2)$

donc d'après le critère d'équivalence la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge d'où la non CVN de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1/ $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1-x)^n\right)$

soit $x \in \mathbb{R}_+$,

Rappel : si $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \neq 0$ alors

$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ diverge.

• si $\sum f_n$ ne cv pas simplement sur I

alors $\sum_n f_n$ ne cv pas uniformément sur I
absolument
normalement

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1-x)^n\right)$$

$$x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \infty \text{ ou n'admet pas de limite} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[\end{cases}$$

$$(1-x)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \infty \text{ ou n'admet pas de limite} & \text{sinon} \end{cases}$$

1ier cas si $x \in [0, 1]$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2} \left| x^n + (1-x)^n \right|$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \left(|x|^n + |1-x|^n \right)$$

$$\leq \frac{2}{n^2}$$

$\forall x \in [0, 1],\quad |f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n^2}$

avec la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2}{n^2}$ converge

(Riemann $\alpha = 2 > 1$) donc $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ cvn sur $[0, 1]$

ce qui implique la cvs, cva, cvu, cvn

sur $[0, 1]$ de $\sum_{n \geqslant 1} f_n$

si $x \in]1, +\infty[$.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\left(x^n + (1 - x)^n\right)$$

$$= \underbrace{\frac{x^n}{n^2}\left(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$$

$\forall x \in]1, +\infty[$

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \neq 0 \implies \sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge

$\implies \sum\limits_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas simplement sur $]1; +\infty[$

$\Downarrow$

non convergence normale — non convergence uniforme — non convergence absolue

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{sur }]1; +\infty[.}$$

2/ $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$x \longmapsto \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

avec $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

d'où la série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$.

donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ $\begin{matrix} \text{cvu} \\ \text{cvs} \\ \text{cva} \end{matrix}$ sur $\mathbb{R}$.

3/ $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc

la série $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ dv.

on a $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}$

or (CVN $\Rightarrow$ CVA) $\Leftrightarrow$ (NON CVA $\Rightarrow$ NON CVN)

d'où $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

- CVS

soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série alternée. $f_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+x^2}$

avec $\left(\frac{1}{n+x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers 0

$n+1 \geq n \Rightarrow n+1+x^2 \geq n+x^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+1+x^2} \leq \dfrac{1}{n+x^2}$

$\Rightarrow$ la suite $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante

d'après le th. spécial des séries alternées

la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

d'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_c = \mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1+x^2} \leq \dfrac{1}{n+1}$

d'où $\|R_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n+1}$ avec $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on a alors $(R_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU}$ fct nulle

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.

71

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
$$x \longmapsto \frac{\ln(1+nx)}{n x^n}.$$

pour $x > 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} n\, e^{-n \ln(x)} \ln(1+nx) \geq 0$$

$= 0$

d'après le lemme de Riemann

la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ cv s (or $\forall x > 1$

sur $]1; +\infty[$

$|f_n(x)| = f_n(x)$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ cva

sur $]1; +\infty[$

- soit $x \in]0,1[$.

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{n\, x^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n\ln(x)} \ln(1+nx)}{n}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ La série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne cv pas simplement

- pour $x = 1$

$$f_n(1) = \frac{\ln(1+n)}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\, \overbrace{f_n(1)}^{\geq 0} = \lim_{n\to+\infty} \ln(1+n) = +\infty$$

d'après le lemme de Riemann

la série $\sum_{n\geq 1} f_n(1)$ diverge

conclusion $\forall x \in]0,1]$, la série

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.

d'où la non cvs de $\sum f_n$ sur $]0,1]$

$\swarrow$ $\Downarrow$ $\searrow$

la non cva — la non cvu — la non cvn

sur $]0,1]$

Étudions la cvn et la cvu sur

$]1;+\infty[$

Étudions la fct f_n sur $]1;+\infty[$.

soit $x \in]1;+\infty[$

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{n x^n}$$

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{1+nx}\, n x^n - n^2 x^{n-1}\ln(1+nx)}{n^2 x^{2n}}$$

$$= \frac{x^n - x^{n-1}(1+nx)\ln(1+nx)}{(1+nx)\, x^{2n}}$$

$$= \frac{x - (1+nx)\ln(1+nx)}{(1+nx)\, x^{n+1}}$$

à partir d'un certain rang N_0

$$= \frac{\overbrace{(1 - n\ln(1+nx))}^{<0}x \overbrace{- \ln(1+nx)}^{<0}}{(1+nx)\, x^{n+1}}$$

$\forall x \in]1,+\infty[,\ \forall n \geq N_0$

$: f_n'(x) < 0$

x	1		$+\infty$
$V.f_n$	$\frac{\ln(1+n)}{n}$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in]1;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{\ln(1+n)}{n}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n}$ diverge

donc $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ diverge

par suite on n'a pas la convergence normale sur $]1;+\infty[$.

CVU ? soit $x\in]1;+\infty[$

$$R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x) \geq \sum_{p=n+1}^{2n} f_p(x)$$

Soit $k \in [n+1, 2n]$.

$$f_k(x) = \frac{\ln(1+kx)}{k \cdot x^k}$$

$$(n+1)x^{n+1} \leq kx^k \leq 2n x^{2n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{kx^k} \geq \frac{1}{2n\, x^{2n}}$$

$$\ln(1+kx) \geq \ln(1+(n+1)x)$$

$$\Rightarrow \quad f_k(x) \geq \frac{\ln(1+(n+1)x)}{2n\, x^{2n}}$$

ne dépend pas de k

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \geq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(1+(n+1)x)}{2n\, x^{2n}}}$$

nbre de termes

$$= \cancel{n}\, \frac{\ln(1+(n+1)x)}{2\cancel{n}\, x^{2n}}$$

$\forall x \in]1; +\infty[,$

$$R_n(x) \geq h_n(x)$$

avec $\quad h_n(x) = \dfrac{\ln(1+(n+1)x)}{2x^{2n}}$

pour $\quad x_0 = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

$$h_n(x_0) = \frac{\ln\left(1+(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)}{2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(3+n)}{2} e^{-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

or

$$\|R_n\|_\infty \geq h_n(x_0)$$

donc $\quad (R_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{cvu}{\not\longrightarrow}_{]1;+\infty[}$ fct nulle d'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne cv pas uniformément sur $]1;+\infty[$.

Exercice 4. $a>0$ $n\in\mathbb{N}$.

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^a e^{-nx}$$

1/ CVS de $\sum_{n\geq 0} f_n$

soit $x\in\mathbb{R}_+$

- $x=0$ $f_n(0)=0 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n(0)$ cv
- $x>0$ $\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x)$ >0

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 x^a e^{-nx} = 0.$$

<0

d'après le lemme de Riemann

La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

D'où $\sum_{n \geq 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$.

et $\mathcal{D}_c = \mathbb{R}_+$

Rq $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| = f_n(x)$

donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ cva sur $\mathbb{R}_+$

2/ Calcul de la somme de $\sum_{n \geq 0} f_n$

soit $x \in \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_c$

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} x^a e^{-nx}$$

$$= x^a \sum_{n \geq 0} e^{-nx}$$

$$= x^a \sum_{n \geq 0} \left(e^{-x}\right)^n$$

Si $x = 0$ alors $\sum_{n \geq 0} f_n(0) = 0$

si $x \neq 0$ $|e^{-x}| < 1$

La serie géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(e^{-x}\right)^n$

converge vers $\frac{1}{1-e^{-x}}$

donc $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = x^a \cdot \sum_{n \geq 0} \left(e^{-x}\right)^n$

$$= \frac{x^a}{1-e^{-x}}$$

conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge vers

$S(x)$ avec

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^a}{1 - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

3/ Montrons que la série

$$\left(\sum_{n \geq 0} f_n \text{ cvn sur } \mathbb{R}_+ \right)$$

ssi

$$(a > 1)$$

Etudions la fct f_n sur $\mathbb{R}_+$.

soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f_n(x) = x^a e^{-nx}.$$

$$f_n'(x) = \left(a x^{a-1} - n x^a\right) e^{-nx}$$

$$= (a - nx)\, x^{a-1} e^{-nx}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & a/n & & +\infty \\
\hline
 & & & f_n\left(\frac{a}{n}\right) & & \\
v.f_n & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 0 & & & & 0
\end{array}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)|$$

$$= f_n\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{a^a}{n^a} e^{-\cancel{n}\frac{a}{\cancel{n}}}$$

$$= a^a e^{-a} \left(\frac{1}{n}\right)^a$$

$$\left(\text{La série } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ cvn sur } \mathbb{R}_+\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\text{La série numérique } \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty\right)$$

converge

$$\Updownarrow$$

$$\left(\text{La série numérique } \sum_{n\geq 1} \overset{\text{constante}}{\overset{\shortparallel}{\boxed{a^a e^{-a}}}} \left(\frac{1}{n}\right)^a\right)$$

converge

$$\Updownarrow$$

$$\left(\text{La série de Riemann } \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^a\right)$$

converge

$$\Updownarrow$$

$$a > 1.$$

4) Etude de la cvu pour $a \leq 1$.

d'après 2)

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^a}{1-e^{-x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Etudions la continuité de S en 0

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{1-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^a}{1-(1-x+o(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{a-1}}{1+o(1)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 = S(0) & \text{si } a > 1 \\ 1 \neq S(0) & \text{si } a = 1 \\ +\infty \neq S(0) & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

- La fct S est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $a > 1$

- La fct S n'est pas continue en 0 pour $a \leq 1$.

Utilisant la contraposée du Th de cvu et continuité :

- pour tout entier n, la fct f_n est continue en a
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ cvs vers la fct S, avec

S n'est pas continue en 0 pour $a \leq 1$

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \leq 1$.

Rq d'après la Q3.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ cvn sur $\mathbb{R}_+$ pour $a > 1$

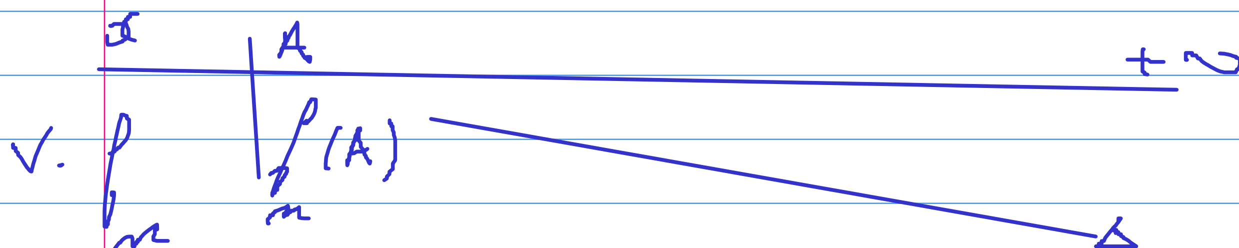
or la cvn $\Rightarrow$ la cvu, d'où

$\sum_{n\geq 1} f_n$ cvu sur $\mathbb{R}_+$ pour $a > 1$.

5/ soit $A \in]0;+\infty[$, montrons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvu sur $[A,+\infty[$.

d'après la tableau de variation (voir Q3), $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq, $\forall n \geq N$

$A > \frac{a}{n}$, et on a :



$$\sup_{x\in[A;+\infty[} |f_n(x)| = f_n(A) = A^a e^{-nA}$$

La série $\sum_{n\geq 1} f_n(A)$ converge car

$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(A) = 0$ (Lemme de Riemann) on a alors la convergence normale

de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[A ; +\infty[$

ce qui implique la convergence uniforme

de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[A ; +\infty[$. pour tout $A > 0$

càd La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge

localement uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

5/ $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{n^x}.$$

cvs de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^x$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^x$

converge ssi $x > 1$.

Donc $\mathcal{D}_c =]1;+\infty[$

et $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $]1;+\infty[$.

• cva de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $]1;+\infty[$.

or $\forall x \in]1;+\infty[$, $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n^x}\right|$

$= f_n(x)$

d'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ cva sur $]1;+\infty[$.

• Etude de la cvu et la CVN sur $]1;+\infty[$ de $\sum_{n\geq 1} f_n$

Etude de la fct f_n sur $]1;+\infty[$

Soit $x \in]1;+\infty[$; $f_n(x) = \frac{1}{e^{x\ln(n)}}$

$f_n(x) = e^{-x\ln(n)}$

$$f'_n(x) = -\ln(n)\, e^{-x\ln(n)} < 0$$

x	1	$+\infty$
v. f_n	$\frac{1}{n}$ $\searrow$	0

$$\sup_{x \in]1;+\infty[} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

La série numérique $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ est

la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui

diverge (d'après la règle de

Riemann).

or $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVN sur $]1;+\infty[$ ssi $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|$ CV

on déduit alors la non convergence

normale de la série de fcts $\sum_{n\geq 1} f_n$

sur $]1;+\infty[$.

* Soit $x \in]1;+\infty[$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$$

$$f_k(x) = e^{-x\ln(k)}$$

soit $k \in [n+1, 2n]$

$$\ln(n+1) \leq \ln(k) \leq \ln(2n)$$

$$e^{-x\ln(k)} \geq e^{-x\ln(n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} e^{-x\ln(k)} \geq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-x\ln(n+1)}}_{n \cdot e^{-x\ln(n+1)}}$$

$$P_n(x) \geq \underbrace{n \cdot e^{-x P_n(n+1)}}_{h_n(x)}$$

⚠ on ne peut pas un $x_0 \in]1;+\infty[$

tq $h_n(x_0) \not\to 0$.

Il faut trouver une autre méthode.

* La fct $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ $x \in]1;+\infty[$

est décroissante sur $[1;+\infty[$

soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$

on a :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^x}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^x}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^x} \leq \boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{k^x}}$$

on applique la somme de 2 à N

et de N + 1 à N'.

on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \\ \displaystyle\sum_{k=N+1}^{N'} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{k=N+1}^{N'} \frac{1}{k^x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (S_1) \begin{cases} \displaystyle\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \\ \displaystyle\int_{N+1}^{N'+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{k=N+1}^{N'} \frac{1}{k^x}. \end{cases}$$

• soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$.

$$\forall t \in [k-1, k]$$

$$\frac{1}{k^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{(k-1)^x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\, dt$$

on applique la somme de 2 à N
et de N+1 à N'

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \int_{1}^{N} \frac{1}{t^x}\, dt \\ \displaystyle\sum_{k=N+1}^{N'} \frac{1}{k^x} \leq \int_{N}^{N'} \frac{1}{t^x}\, dt \end{cases} \qquad (S_2)$$

(S_1) et (S_2) impliquent

$$\int_{2}^{N+1} \frac{1}{t^x}\, dt \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \int_{1}^{N} \frac{1}{t^x}\, dt$$

$$\int_{N+1}^{N'+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{N'} \frac{1}{k^x} \leqslant \int_{N}^{N'} \frac{1}{t^x}\,dt$$

on note $R_{N,N'}^{(x)} = \sum_{k=N+1}^{N'} f_k(x)$

on a: $R_N(x) = \lim_{N' \to +\infty} R_{N,N'}^{(x)}$

$$\int_{N+1}^{N'+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leqslant R_{N,N'}(x) \leqslant \int_{N}^{N'} \frac{1}{t^x}\,dt$$

$$\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_{N+1}^{N'+1} \leqslant R_{N,N'}(x) \leqslant \frac{1}{-x+1}\left[t^{-x+1}\right]_{N}^{N'}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N'+1)^{\overbrace{x-1}^{>0}}} - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\right) \leqslant R_{N,N'}^{(x)} \leqslant$$

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N')^{x-1}} - \frac{1}{N^{x-1}}\right)$$

Lorsque $N' \longrightarrow +\infty$ on obtient

$x > 1$

$$\underbrace{\frac{1}{x-1}\frac{1}{(N+1)^{x-1}}}_{= g_N(x)} \leqslant R_N(x) \leqslant \underbrace{\frac{1}{x-1}\frac{1}{N^{x-1}}}_{= h_N(x)}$$

- si $\|h_N\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \|R_N\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Downarrow$

- si $\exists\, x_0 \in]1,+\infty[$ tq $g_N(x_0) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

alors $\|R_N\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

soit $x_0 = 1 + \frac{1}{\ln(n)}$.

$$g_n(x_0) = \frac{1}{1/\ln(n)} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{\ln(n)}}}$$

$\vdots$

$$= \ln(n) \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

$$= \ln(n) \; e^{\frac{1}{\ln(n)} \cdot \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$= \ln(n) \cdot e^{-\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

on a : $\| R_n \|_\infty \geq g_n(x_0) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow (R_n)_n \underset{]1;+\infty[}{\overset{cvu}{\not\longrightarrow}}$ fct nulle

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément

sur $]1;+\infty[$.

6/ $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$. $x \in \mathbb{R}$.

• soit $x \leq 0$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ diverge.

soit $x > 0$.

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est une série alternée

tq : $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante

positive et tend vers 0. D'après le Th spécial

des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge

donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$

donc $D_c =]0; +\infty[$.

⊛ convergence absolue. soit $x > 0$

$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x}$ série de Riemann

La série $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ converge ssi $x > 1$

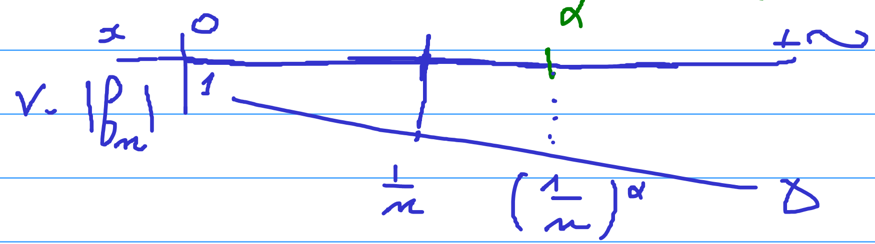
donc on a la convergence absolue sur

$]1; +\infty[$.

sur $]0, 1]$ la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne cv pas absolument donc sur]0, 1], $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne cv pas normalement.

• cvu et cvn $(\alpha > 1)$

d'après la Q5.



$$\sup_{x \in]0; +\infty[} |f_n(x)| = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n$ ne cv pas uniformément sur $]0; +\infty[$.

Rq soit $\alpha > 1$,

$$\sup_{x \in [\alpha, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^\alpha} \to 0 \qquad \alpha > 1$$

on a : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann $\alpha > 1$)

donc la série cvn et cvu sur $[\alpha, +\infty[$

d'où la cv localement uniformément sur

$]1; +\infty[$

Exercice 6.

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-n x^2}}{(n+1)^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

soit $x \in \mathbb{R}$, $n^2 |\overbrace{f_n(x)}^{\to 0}| = \frac{n^2}{(n+1)^3} e^{-n x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'après le lemme de Riemann

La série $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge. pour tout $x \in \mathbb{R}$.

donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur $\mathbb{R}$

d'où la convergence simple de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$

$D_c = \mathbb{R}$.

soit $S = \sum_{n \geq 0} f_n$, on a S est bien

définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que S est continue

sur $\mathbb{R}$.

Montrons d'abord la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$.

ne dépend pas de x

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |f_n(x)| = \dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \dfrac{1}{(n+1)^3}$

or la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(n+1)^3}$ converge

(Riemann $\alpha = 3$), on a alors la convergence normale de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$, d'où $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.

on a : 1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ la série de fct $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers S

d'après le Th de continuité la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-n} \sin(n^2 x)$.

ne dépend pas de x

$\forall x \in \mathbb{R}.\quad |f_n(x)| \leqslant e^{-n} = (e^{-1})^n$

on a : $\sum_{n\geqslant 0} (e^{-1})^n$ est une série géométrique

convergente car $|e^{-1}| < 1$.

on a alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$, d'où

la CVS de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$. La fct $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

est bien définie.

Montrons que S est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrons d'abord la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_n'(x) = n^2 e^{-n} \cos(n^2 x)$

ne dépend pas de x

$\forall x \in \mathbb{R},\quad |f_n'(x)| \leqslant \underbrace{n^2 e^{-n}}_{u_n}$

de plus $n^2 u_n = n^4 e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'après le lemme de Riemann la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, d'où la cvN de $\sum_{n\geq 0} f_n'$ sur $\mathbb{R}$. , par suite la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvU

sur $\mathbb{R}$.

on a : 1/ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, la fct f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2/ La série de fcts $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvU sur $\mathbb{R}$.

vers $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

3/ La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ cvS vers S sur $\mathbb{R}$.

alors D'après le Th de dérivation la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvU sur $\mathbb{R}$ (déjà démontré) vers la fct S qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

et $S' = S_1$. dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} \qquad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

soit $x>0$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est une série alternée.

de plus $\left(|f_n(x)|\right)_{n\geq 0} = \left(\frac{1}{n!(n+x)}\right)_n$ est une suite décroissante, tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$

d'après le Th spécial des séries alternées la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ CV S sur $\mathbb{R}$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

S est bien définie

1/ Montrons que S est de classe C^1.

Montrons d'abord que la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvu sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{-1}{(n+x)^2}$

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{\underbrace{n!}_{1\leq}\underbrace{(n+x)^2}_{>0}} \leq \frac{1}{n^2}$$

on a : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* , & |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2} \\ \text{la série de Riemann } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ cv } (\alpha = 2 > 1) \end{cases}$

d'où la série de fct $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvN sur $\mathbb{R}_+^*$

Par suite la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvU sur $\mathbb{R}_+^*$

on a : 1/ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fct de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2/ La série de fcts $\sum_{n\geq 0} f_n'$ cvU sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

3/ La série de fcts $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvS vers S sur $\mathbb{R}$

d'après le Th de dérivation la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ cvU vers S sur $\mathbb{R}$, avec S de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $S' = S_1$.

2/ Soit $g : x \longmapsto x\, S(x) - S(x+1)$
$x \in \mathbb{R}_+^*$

Montrons que g est une constante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Updownarrow$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = \left(x\, S(x) - S(x+1)\right)'$$

$$= S(x) + x\, S'(x) - S'(x+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n!(n+x)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(-1)^n}{n!(x+1+n)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{x}{(n+x)^2} + \frac{1}{((x+1)+n)^2} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n+\cancel{x}-\cancel{x}}{(n+x)^2} + \frac{1}{(x+1+n)^2} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(n+1+x)^2}$$

pour $n=0$ on a 0.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1+x)^2}$$

$p = n-1 \Rightarrow n = p+1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1+x)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1+x)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1+x)^2} \left((-1) + 1 \right) = 0$$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = 0$ ou peut marche

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \text{cste} = g(1)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x\, S(x) - S(x+1) = S(1) - S(2).$

a/ Equivalent de S au voisinage de 0.

3/ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x\, S(x) = S(x+1) + S(1) - S(2)$

$$\lim_{x \to 0} S(x+1) + S(1) - S(2) = 2S(1) - S(2) \in \mathbb{R}.$$

donc : $$\lim_{x \to 0} \frac{S(x)}{\frac{1}{x} \cdot (2S(1) - S(2))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\, S(x)}{2S(1) - S(2)} = \lim_{x \to 0} \frac{S(x+1) + S(1) - S(2)}{2S(1) - S(2)}$$

$$= 1.$$

par suite $$S(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2S(1) - S(2)}{x}.$$

b) un voisinage de S en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$x\, S(x) - S(x+1) = S(1) - S(2)$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ tq $S(x) \neq 0$

$$S(x)\left(x - \frac{S(x+1)}{S(x)}\right) = S(1) - S(2)$$

Montrons que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{S(1) - S(2)}{x - 1}$.

$$\frac{S(x)}{\frac{S(1) - (2)}{x - 1}} = \frac{\frac{S(1) - S(2)}{x - \frac{S(x+1)}{S(x)}}}{\frac{S(1) - S(2)}{x - 1}} = \frac{x - \frac{S(x+1)}{S(x)}}{x - 1}$$

$$= \frac{x}{x-1} - \frac{S(x+1)}{S(x)\,(x-1)}$$

$$= \frac{x}{x-1} - \frac{S(x) - S(1) + S(2)}{S(x)\,(x-1)}$$

$$= \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{\overbrace{S(1) - S(2)}^{\in \mathbb{R}.}}{x-1}$$

$$x \to +\infty$$

$$1 - 0 + 0.$$

Exercice 8.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \qquad x > 1.$$

1) soit $x > 1$

$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série de Riemann

convergente car $x > 1$

d'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ cvs sur $]1;+\infty[$.

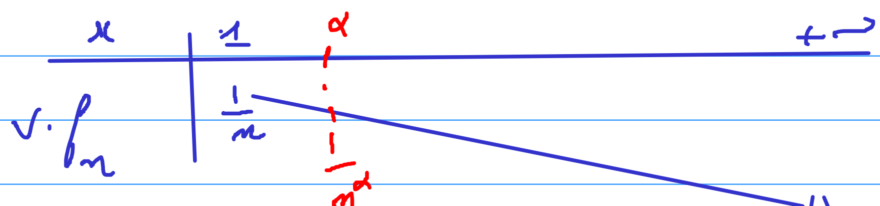
on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

2/ $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in]1;+\infty[$

$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f_n'(x) = -\ln(n)\, e^{-x\ln(n)} < 0$

Rq



$\forall \alpha > 1$, $\sup_{x\in[\alpha;+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^\alpha}$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVN

sur $[\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 1$.

d'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $[\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 1$

ce qui équivaut à la convergence

localement uniformément sur $]1 ; +\infty[$.

Pour Mq S est décroissante on vérifie que

$S'(x) \leq 0 \quad \forall x > 1$.

Montrons d'abord que $S'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$

(Th dérivation)

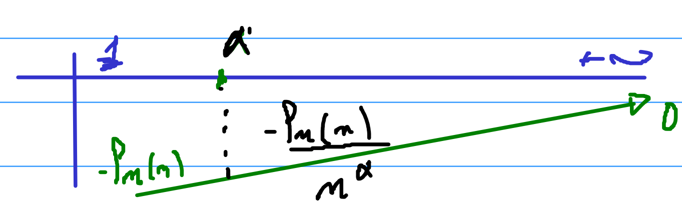
a/ Mq $\sum_{n\geq 1} f_n'$ cv localement uniformément sur

$]1 ; +\infty[$.

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $\quad f_n'(x) = -\ln(n) \frac{1}{n^x}$

$= -\ln(n)\, e^{-x\ln(n)}$

$f_n''(x) = \ln^2(n)\, e^{-x\ln(n)}$.



$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n'(x)| = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$$

et la série de Bertrand $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$

converge ($\alpha > 1$ et $\beta = -1$)

on a alors la convergence normale de la série

$\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 1$.

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n'$ cvu sur $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 1$

$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} f_n'$ converge localement uniformément

sur $]1; +\infty[$.

on a: $\circ$ $\forall n \geq 1$, la fct f_n est de classe C^1

sur $]1; +\infty[$.

$\circ$ La série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ cv localement

uniformément sur $]1; +\infty[$. vers S_1

$\circ$ $\sum_{n\geq 1} f_n$ cv S sur $]1; +\infty[$ vers S

d'après le Th de dérivation, S est de classe

C^1 sur $]1; +\infty[$ et $S'(x) = S_1(x)$ $\forall x > 1$

d'où $$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} - \ln(n) \frac{1}{n^x} \quad \forall x > 1$$

$$= - \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}}_{\geq 0} \Big) \leq 0$$

d'où S est décroissante sur $]1;+\infty[$.

3) debut voir page 43.

on a : $$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^x} \leq \int_1^{N} \frac{1}{t^x} dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1} \right]_2^{N+1} \leq S_N(x) - 1 \leq \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1} \right]_1^{N}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{-x+1} \frac{1}{(N+1)^{x-1}}}_{N \to +\infty} - \frac{1}{1-x} \frac{1}{2^{x-1}} \leq \underbrace{S_N(x) - 1}_{N \to +\infty} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x} \frac{1}{N^{x-1}}}_{N \to +\infty} - \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow - \frac{1}{1-x} \frac{1}{2^{x-1}} \leq S(x) - 1 \leq - \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{1-x} \frac{1}{2^{x-1}} \leq S(x) \leq 1 - \frac{1}{1-x}$$

4)

a) $1 + \dfrac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} < S(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ $\quad\quad$ $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

d'après le Th d'encadrement

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$$

b/ $S(x) \geq 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}$

$\xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$

d'après le th de minoration

$$\lim_{x \to 1^+} S(x) = +\infty.$$

4/ d'après 2/ S est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$

donc S est continue, dérivable sur $]1;+\infty[$

et de plus on a montré que

$$\forall\, x \in \,]1;+\infty[, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x}$$