Cycle Pré-ING - Deuxième année
Semestre 1 - 2022/2023

Séries - TD 2

Exercice 1 . Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ sur $E = [0,1]$.
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $E = \mathbb{R}$ puis sur $E =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ (où $a > 0$).
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1}$ sur $E = \mathbb{R}_+$.
4. $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $E = [0,1]$ puis sur $E = [0,a]$ où $a \in]0,1[$.
5. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ sur $E = [0,1]$, $\quad n \neq 0$
6. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ sur $E = \mathbb{R}_+$
7. $f_n(x) = e^{-nx^2}\sin(nx^2)$ sur $E = [0,1]$ puis sur $E = [a,1]$ où $a \in]0,1[$
8. $f_n(x) = \sin^n(x)$ sur $E = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis sur $E = [0,a]$ où $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
9. $f_n(x) = \sin(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}) - \dfrac{x}{4\pi n}$ sur $E = \mathbb{R}_+$, $\quad n \neq 0$
10. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ sur $E = \mathbb{R}_+$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2 . Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}$.

1. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$

Exercice 3 . Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, 0], \\ n^2 x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}], \\ (1-n^2)x + 2n - \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in [\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que
   (a) (f_n) converge simplement vers une fonctions f que l'on déterminera.
   (b) $(f_n \circ f_n)$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que la suite $(f_n \circ f_n)$ converge simplement vers $f \circ f$.
3. Soit à présent la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $(f_n(x)) = x^2 + \frac{1}{n}$. Montrer que
   (a) la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
   (b) la suite $(f_n \circ f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f \circ f$.

Exercice 4 . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[-1, 1]$.
3. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n^2}.$$

   Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

Exercice 5 . Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) \mathrm{d}t.$$

   Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Soit $a \in]0, 1[$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, 1]$.

Exercice 6 . Calculer

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{n e^x}{n + x} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^5}{(1 + x^2)^n}.$$

Exercice 7 .

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant}$ de fonctions dfinie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. En déduire la nature de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} dx$$

Exercice 8 .

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[\alpha,1]$ avec $\alpha\in]0,1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Montrer que $\mid f_n(x)-f(x)\mid$ est bornée sur $[0,1]$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}dx$$

Exercice 9 . Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application.
   Montrer que $(f_n\circ\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f\circ\varphi$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $(\psi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\psi\circ f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Que peut-on dire si ψ n'est pas uniformément continue ?
   Prendre $f_n(x) = x+\dfrac{1}{n}$ *et* $\psi(x)=x^2$.

Exercice 10 . Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=f(x+\frac{1}{n})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$? justifier votre réponse.
3. Montrer que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.