TD2 A (Suites de fcts)

Exercice 1

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+nx}$$

• Etudions la convergence simple de (f_n)

soit $x \in [0,1]$

∘ si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

∘ si $x \neq 0$ $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

conclusion : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 0$

* Etudions la convergence uniforme de (f_n) vers f.

soit $x \in [0,1]$

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx}$$

$$1 + nx \geq nx \implies \frac{x}{1+nx} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$$

$$\left.\begin{cases} \forall x \in [0,1], \ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}\right) \implies (f_n) \xrightarrow[{[0,1]}]{CVU} f$$

2/ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

* Etudions la convergence simple de (f_n)

soit $x \in \mathbb{R}$

- $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0$
- $x \neq 0$ $\quad f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{nx}{n^2x^2} = \dfrac{1}{nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

conclusion

$(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 0$

* Etudions la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}$.

on considère $x_0 = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \dfrac{n \, {}^1\!/_n}{1+n^2\frac{1}{n^2}} - 0 \right| = \dfrac{1}{2}$

or $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_0) - f(x_0)| = 1/2$

donc $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$

donc $(f_n) \overset{CVU}{\underset{\mathbb{R}}{\not\longrightarrow}} f$

* Etudions la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[a; +\infty[$. $a>0$

Rq $f_n(-x) = \dfrac{-nx}{1+n^2(-x)^2} = -f_n(x)$

f_n est impaire il suffit de l'étudier sur $[a; +\infty[$

soit $x \in [a; +\infty[$ $\qquad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$$

Etudions la variation de f_n sur $[a; +\infty[$.

$$f_n'(x) = \frac{(nx)'(1+n^2x^2) - (nx)(1+n^2x^2)'}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{n + n^3x^2 - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$1 - n^2 x^2 = 0 \iff (1 - nx)(1 + nx) = 0$
$\Rightarrow x = 1/n$ ou $x = -1/n$

$f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ ou $x = -1/n$ $\qquad a > 0$

x	$-\infty$	$-a$	$-1/n$	0	$1/n$	a	$+\infty$
signe de f_n'	$-$		$+$	$+$		$-$	
v. f_n	0 ↘		$-\frac{1}{2}$ ↗		$\frac{1}{2}$ ↘	$\frac{na}{1+n^2a^2}$	↘

⚠ $a > \frac{1}{n}$ (tjrs possible) $\qquad$ si $0 < a < \frac{1}{n}$ (pas possible) $0 < a < 0$ ⇓ $a = 0$ absurde ⇓ $a > 1/n$

$\exists N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq N$, $\frac{1}{n} < a$.

$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to +\infty} \frac{na}{1+n^2a^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où la CU de (f_n) vers f sur $[a; +\infty[$.

où f_n est impaire $\Rightarrow \sup_{x \in]-\infty, -a]} |f_n(x) - f(x)|$
$= |f_n(-a)| = \frac{na}{1+n^2a^2}$
$n \to +\infty$ ⇓ 0

$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow[]-\infty, -a]]{CVU} f = 0$

3/ $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

* Etudions la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$

soit $x \in \mathbb{R}_+$

1^{er} cas $x \in [0,1[$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = -1$$

$2^{ième}$ cas $x = 1$, $x^n = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$$f_n(1) = 0$$

$3^{ième}$ cas $x \in]1; +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = +\infty$

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^n} = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$$

conclusion

$$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{cvs} f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Th cvu et continuité

① $\forall n$, la fct f_n continue en a $(a \in I)$

② • $f_n \xrightarrow[I]{cvu} f$ ① et ② ⟹ ③ : f continue en a

• on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est
① continue sur $\mathbb{R}_+$ ✓ en particulier en 1
Non (3) ⟹ Non (① et ②)
''
Non ① ou Non ②

• $(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{cv\,s} f$

• f n'est pas continue en 1 car Non 3

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq f(1)$$

d'après le Th de continuité la suite de fct $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

5 / $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{n e^{-x} + x^2}{n + x}$ $n \neq 0$

* Etudions la convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$

soit $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n e^{-x}}{n} = e^{-x}$$

donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

donc $(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^{-x}$

* Convergence uniforme.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} - e^{-x} \right|$$

$$= \left| \frac{x(x - e^{-x})}{n+x} \right|$$

$$= \frac{x^2 - x e^{-x}}{n+x}$$

On considère $g_n(x) = \dfrac{x(x - e^{-x})}{n+x}$

Déterminons le sup $|g_n(x)|$

Soit $x \in [0,1]$. $g_n(x) = \dfrac{x^2 - xe^{-x}}{n+x}$

• $n \leq n+x \leq n+1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n}}$ (1)

• $\boxed{0 \leq x^2 \leq 1}$ $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 = e^0$

on multiplie par $-x$.

somme

$-1 \leq -x \leq -xe^{-x} \leq -xe^{-1} \leq 0$

$$\boxed{-1 \leq -xe^{-x} \leq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq x^2 - xe^{-x} \leq 1$$

on multiplie par $\dfrac{1}{n+x}$

on obtient

car $\dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n}$ voir (1)

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{-1}{n+x} \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

donc $|g_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \quad \forall x \in [0,1]$

de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{\text{CVU}} f$

$$1] \quad f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+nx}.$$

- $\underline{CVS}$

soit $x \in [0,1]$.

si $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

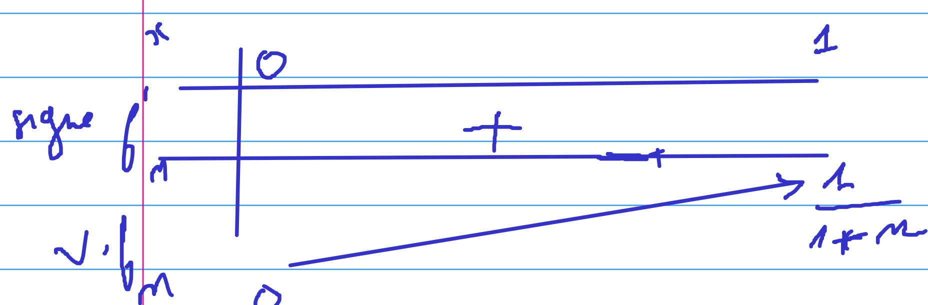
si $x \neq 0$ $\quad f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f \equiv 0$$

- CVU

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx} = f_n(x)$$

$$f_n'(x) = \frac{1 + \cancel{nx} - \cancel{nx}}{(1+nx)^2} > 0$$



$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVU} f.$$

4| $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

• Etudions la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$

soit $x \in [0,1]$.

si $x = 1$ $\quad f_n(1) = 0. \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$x \in [0,1[$, $\quad x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $(x^2)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\cdot \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1.$$

conclusion la suite de fcts $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fct f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$$

* Convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$.

on a: • $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fct continue en 1

• $(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{cvs} f$ avec f n'est pas continue en 1

(car $f(1) = 0$ et $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$)

d'après le Th de cvu et continuité

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\xrightarrow[{[0,1]}]{cvu} f$

* soit $a \in]0,1[$, Etudions la cvu sur $[0,a]$ de $(f_n)_n$ vers f.

soit $x \in [0,a]$, déterminons ou majorons le $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)|$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1+x^{2n}} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{1-x^n-1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right| = \frac{x^n(1+x^n)}{1+x^{2n}}$$

$1 + x^n \leqslant 2$ car $x < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x^n(1+\underbrace{x^n}_{\leqslant 1}) \leqslant 2.x^n \leqslant 2a^n \text{ car } x \leqslant a \\ \bullet\ 1 + x^{2n} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^{2n}} \leqslant 1 \end{cases}$$

Donc $\forall x \in [0,a]$; $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x^n(1+x^n)}{1+x^{2n}} \leqslant 2a^n$

or $2a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $a \in]0,1[$

par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0,a]} |f_n(x) - f(x)| = 0$

d'où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,a]}]{CVU} f$.

6/ $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^{-nx} \sin(nx)$

* Convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x)| \leqslant \underbrace{e^{-nx}}_{\substack{\downarrow \; n \to +\infty \\ 0}}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ d'où $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CVS} f = 0$

* convergence uniforme de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}_+$

pour $x_0 = \frac{1}{n}$ $\quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)|$

or $f_n(x_0) - f(x_0) = e^{-1} \sin(1) - 0$

$= \frac{\sin(1)}{e} \neq 0$

on a alors $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sin(1)}{e} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CVU} f$

7/ $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^{-nx^2} \sin(nx^2)$

• soit $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f \equiv 0$

• $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$

$$\underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\shortparallel} \leqslant \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|}_{\shortparallel}$$

$$e^{-1}\sin(1) \leqslant \|f_n - f\|_\infty$$

$e^{-1}\sin(1) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

donc $(f_n) \xrightarrow[{[0,1]}]{\cancel{cvu}} f$

- soit $a > 0$, $a \in]0,1[$

Etudions la cvu de la suite de fcts $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[a, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2} \sin(nx)|$$

or $\forall x \in [a, 1]$ $\begin{cases} |\sin(nx)| \leq 1 \\ e^{-nx^2} \leq e^{-na^2} \end{cases}$

ne dépend pas de x

donc $\forall x \in [a, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-na^2}$

$n \to +\infty$

0

$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)|}$

d'où $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on a alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[a,1]}]{cvu} f$

8/ $f_n : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin^n(x)$

- Convergence simple de (f_n) sur $[0, \pi/2]$.

soit $x \in [0, \pi/2]$

si $x = \pi/2$ $\quad \sin(\pi/2) = 1 \Rightarrow f_n(\pi/2) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

si $x \in [0, \pi/2[$, $|\sin(x)| < 1 \Rightarrow (\sin(x))^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

conclusion

$$(f_n) \xrightarrow[{[0,\pi/2]}]{CVS} f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi/2[\\ 1 & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$$

- Convergence uniforme sur $[0, \pi/2]$ de $(f_n)_n$ vers f.

On a : • pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est continue en $\pi/2$.

- La suite de fcts $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement

sur $[0, \pi/2]$ vers la fonction f.

- La fct f n'est pas continue en $\pi/2$ car.

$$f(\pi/2) = 1 \neq \lim_{x\to\pi/2} f(x)$$

Alors, D'après le Th de cvu et continuité

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{[0,\pi/2]}{\overset{cvu}{\not\longrightarrow}} f$$

- soit $a \in]0, \pi/2[$, étudions la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[0, a]$

$$\forall x \in [0, a], \quad f(x) = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |(\sin x)^n - 0|$$
$$= (\sin x)^n$$

La fct $x \longmapsto \sin x$ est croissante sur $[0, \pi/2]$

en particulier sur $[0, a]$.

donc $\forall x \in [0, a], 0 \leq \sin x \leq \sin a$.

$$\Rightarrow \forall x \in [0, a],\ 0 \leq (\sin x)^n \leq (\sin a)^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{x\in[0,a]} |(\sin a)^n|}\leq (\sin(a))^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)|}_{\|f_n - f\|_\infty} \leq (\sin(a))^n$$

$$\|f_n - f\|_\infty \leq (\sin(a))^n$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin a)^n = 0$ car $0 \leq \sin a < 1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

$$\Updownarrow$$

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,a]}]{CVU} f.$$

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin\left(\sqrt{x + 4\pi^2 n^2}\right) - \frac{x}{4\pi n}, \quad n \neq 0$$

$$\sin\left(\sqrt{(2\pi n)^2\left(1 + \frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)}\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \sin\left(2n\pi \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{4\pi^2 n^2}}\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \sin\left(2n\pi\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{4\pi^2 n^2} + o\left(\frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$a = 2n\pi$

$$= \sin\left(2n\pi + \frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{x}{2\pi n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$\sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$= \sin(a+b)$$

$$= \sin\left(\frac{x}{2\pi n} + o\left(\frac{x}{2\pi n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \cancel{\frac{x}{4\pi n}} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{4\pi n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^3\right) \cancel{- \frac{x}{4\pi n}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{x}{2\pi n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-x^3}{6 \times 64 \pi^3 n^3} = 0$$

d'où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CVS} f = 0$

* Etudions la CVU de (f_n) vers f sur $\mathbb{R}_+$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sin\left(\sqrt{x - 4\pi^2 n^2}\right) - \frac{x}{4\pi n} \right|$$

$$x_0 = \cancel{\frac{1}{2\pi n}} \qquad x_0 = 4\pi^2 n^2$$

$$f_n(x_0) - f(x_0) = \sin\left(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n^2\right) - \frac{4\pi^2 n^2}{4\pi n} - 0$$

$$= 0 - \pi n - 0 = -\pi n$$

$$\underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{=\, n\pi} \leq \underbrace{\sup_{x \in [0;+\infty[} |f_n(x) - f(x)|}_{=\, \|f_n - f\|_\infty}$$

$$n\pi \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$n \xrightarrow{} +\infty$, $n\pi \to +\infty$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = +\infty \Rightarrow$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \overset{CVU}{\underset{\mathbb{R}_+}{\not\longrightarrow}} f.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

9/ $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sin(x + 4\pi n^2)^{1/2} - \dfrac{x}{4\pi n}$

$$f_n(x) = \sin\left(\sqrt{4\pi^2 n^2\left(1 + \frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)}\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \sin\left(2\pi n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{4\pi^2 n^2} + o\left(\frac{x}{4\pi^2 n^2}\right)\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \sin\left(2\pi n + \left(\frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{x}{2\pi n}\right)\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \sin\left(\frac{x}{4\pi n} + o\left(\frac{x}{2\pi n}\right)\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$= \cancel{\frac{x}{4\pi n}} - \frac{x^3}{384\pi^3 n^3} + o\left(\frac{x^3}{8\pi^3 n^3}\right) - \cancel{\frac{x}{4\pi n}}$$

$$= \frac{-x^3}{384\pi^3 n^3} + o\left(\frac{x^3}{n^3}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ (f_n(x)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{cvs} f \equiv 0$

* Etudions la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$

$$\Big| f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{0} \Big| = \sin\left(\sqrt{x - 4\pi^2 n^2}\right) - \frac{x}{4\pi n}$$

$$x_0 = 4\pi^2 n^2$$

$$\underbrace{\left| f_n(x_0) - f(x_0) \right|}_{\shortparallel} \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\left| -\pi n \right| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \geq \underbrace{\pi n}_{+\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \quad \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

donc $(f_n)_n \underset{\mathbb{R}_+}{\overset{cvu}{\not\Rightarrow}} f \equiv 0$

10/ $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto n^\alpha x e^{-nx}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = e^{\alpha \ln(n)} \, x \, e^{-nx} \quad nx > 0$$

$$= x e^{-nx + \alpha \ln(n)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$; $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{cvs} f = 0$

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-xn}$$

$$g_n'(x) = n^\alpha (1 - nx) e^{-nx}$$

$$g_n'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/n$$

x	0		$1/n$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
$v.\ f_n$	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{n})$	$\searrow$	0

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty = f_n(1/n)$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha} \frac{1}{n} e^{-1} = n^{\alpha-1} e^{-1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} e^{-1} & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$$

1^{er} <u>cas</u> $\alpha = 1$ $\|f_n - f\|_\infty = e^{-1} \not\to 0$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{cvu}{\underset{\mathbb{R}_+}{\not\longrightarrow}} f$

2^{ieme} <u>cas</u> $\alpha > 1$, $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{cvu}{\underset{\mathbb{R}_+}{\not\longrightarrow}} f$

3^{ieme} cas $\alpha < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{cvu} f$

Exercice 2

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$
$$x \longmapsto \frac{x^k}{x^2+n}, \quad k \in \mathbb{N}$$

soit $x \in \mathbb{R}$; $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{\cancel{CVS}} f = 0$

* Etudions la CVU de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}.$$

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x)$$
$$= f_n(x)$$

$$f_n'(x) = \frac{k\,x^{k-1}(x^2+n) - 2x^{k+1}}{(x^2+n)^2}$$

$$= \frac{x^{k-1}\left(k x^2 - 2x^2 + nk\right)}{(x^2+n)^2}$$

$k \neq \{0, 1, 2\}$

$$= \frac{x^{k-1}\left(\overbrace{(k-2)}^{>0} x^2 + \overbrace{nk}^{>0}\right)}{(x^2+n)^2}$$

$f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 = \dfrac{nk}{2-k}$, $\underline{k \neq 2}$

- $\underline{1^{ier} \text{ cas}}$ $k = 0$ $\forall x$ $f_n(x) = \dfrac{1}{\underbrace{\boxed{x^2+n}}_{\geq n}} \leq \dfrac{1}{n}$

$\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\Rightarrow (f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$

• 2ième cas $\quad k = 1$

$$f_n'(x) = \frac{n - x^2}{(n+x^2)^2} \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & -1/\sqrt{n} & & 1/\sqrt{n} & & +\infty \\
\hline
v.\ f_n & 0 & \searrow & -\frac{1}{2n^{3/2}} & \nearrow & \frac{1}{2n^{3/2}} & \searrow & 0
\end{array}$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1/\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2n^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f$$

3ième cas $\quad k = 2$

• $$f_n'(x) = \frac{2nx}{(x^2+n)^2}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & - & 0 & + & \\
\hline
 & 1 & \searrow & 0 & \nearrow & 1
\end{array}$$

• $$f_n(x) = \frac{x^2}{n+x^2}$$

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \underset{+\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$

• autrement $\quad f_n(n) = \dfrac{n^2}{n+n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(n) - f(n)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

4ième cas $p > 2$.

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x^p}{x^2 + n}$$

Méthode 1

$$f_n(n) = \frac{n^p}{n + n^2} \underset{+\infty}{\sim} n^{p-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(n) - f(n)|$$

$$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVU}{\not\longrightarrow}} f$$

Méthode 2 $\quad f_n'(x) = \dfrac{x^{p-1}\left(\overbrace{(p-2)x^2}^{>0} + \overbrace{np}^{>0}\right)}{(x^2 + n)^2}$

- p pair $\quad p - 1$ impair

x		0	
V. f_n	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

- p impair $\quad p - 1$ pair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
V. f_n	$-\infty$	↗	$+\infty$

$$\|f_n - f\| \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Conclusion.

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k>2$
$\Vert f_n - f\Vert_\infty < \frac{1}{n}$ $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$	$\Vert f_n - f\Vert_\infty = \frac{1}{2n^{3/2}}$ $(f_n)_n \xrightarrow{CVU} f$	$\Vert f_n - f\Vert_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ $(f_n) \stackrel{CVU}{\not\to} f$	$\Vert f_n - f\Vert_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ $(f_n)_n \stackrel{CVU}{\not\to} f$.

2) soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

Etudions la CVU de $(f_n)_n$ vers f sur $[a,b]$

<u>1^{ier} cas</u> $k=0$ et $k=1$

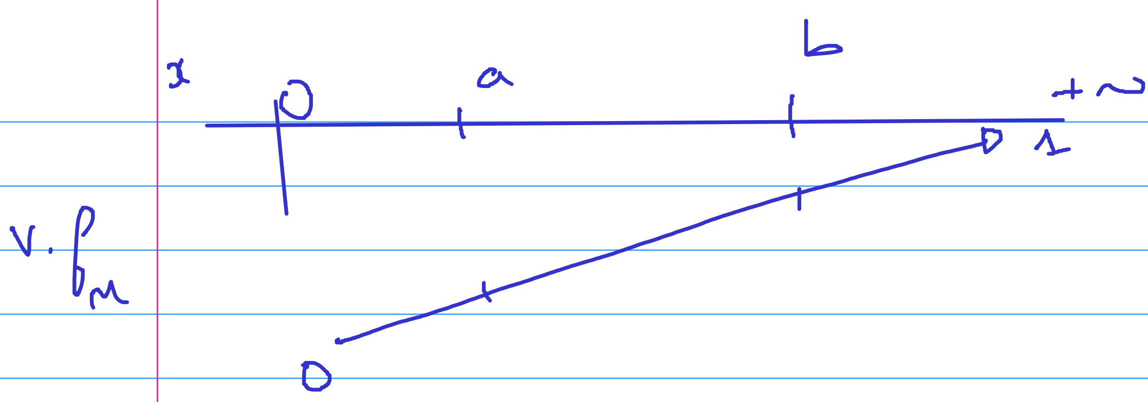
on a : $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$ donc

$(f_n)_n \xrightarrow[[a,b]]{CVU} f$ $\forall$ $a, b \in \mathbb{R}$,

<u>2^{ieme} cas</u> $k=2$.

on remarque que f_n est paire. Il suffit de l'étudier sur $[0; +\infty[$, prenons $a, b \in \mathbb{R}_+$ et étudions la CVU sur $[a, b]$.

d'après le tableau de variation de la ① 1



$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = f_n(b) = \frac{b^2}{b^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- $a < 0 < b$, $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \max(f_n(a), f_n(b))$

et $\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = 0$

$$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow[[a,b]]{CVU} f$$

- $a < b < 0 \to \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$

$$= f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>conclusion</u> pour $\beta = 2$

$(f_n)_n$ CVU vers f sur tout borné

de $\mathbb{R}$.

• 1ère cas $k > 2$

• k pair $\Rightarrow$ $k-1$ impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
v. f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3 cas possibles

• $a < b \leq 0$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a)$$

• $a < 0 \leq b$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\left(f_n(a), f_n(b)\right)$$

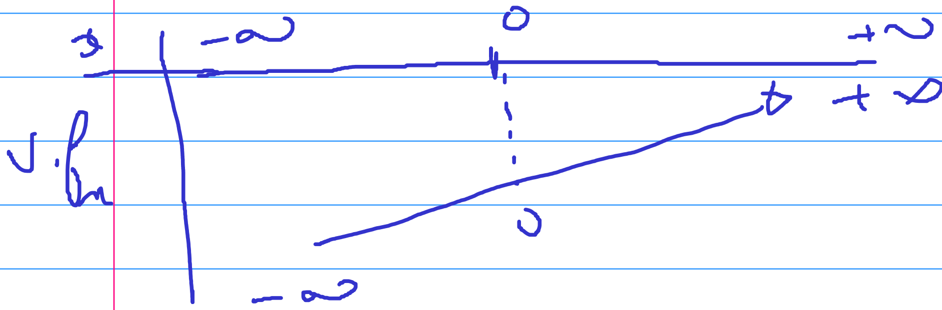
• $0 \leq a < b$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(b)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(b) = 0$

on a tjrs $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• f_n impair et $f_n - 1$ pair.



• si $0 \leq a < b$ $\quad \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(b)$

• si $a \leq 0 \leq b$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\left(|f_n(a)|, f_n(b)\right)$$

• $a < b \leq 0$

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(a)|$$

avec $\lim_{n \to +\infty} |f_n(a)| = \lim_{n \to +\infty} f_n(b) = 0$

donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Conclusion $\forall k \geq 2$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[a,b]}]{CVU} f \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Conclusion générale : $\forall k \in \mathbb{N}$

La suite de fcts $(f_n)_n$ CVU sur tout borné de $\mathbb{R}$ vers f. D'où $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

$$f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+n^2x^2}$$

1/ soit $x \in [-1, 1]$.

- $x = 0$ $\quad f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

• $x \neq 0$

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2 x^2} = \frac{1}{x n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

<u>Conclusion</u> $(f_n)_n \xrightarrow[{[-1,1]}]{CVS} f \equiv 0$

• Étudions la CVU de $(f_n)_n$ vers f.

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{n}$$

x	-1		$-1/n$		0		$1/n$		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f_n(x)$	$-\frac{1}{1+n^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2n}$	$\nearrow$			$\frac{1}{2n}$	$\searrow$	$\frac{1}{1+n^2}$

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[-1,1]}]{cvu} f$.

2/ $f'_n(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$

étudions la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

soit $x \in [-1,1]$

- $x=0$ $\quad f'_n(0) = 1$

- $x \neq 0$ $\quad f'_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-n^2x^2}{n^4x^4} = \dfrac{-1}{n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

conclusion

$(f'_n)_n$ converge simplement vers la fct h

définie sur $[-1,1]$ par $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

ona :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct f'_n est continue en 0
- $(f_n)_n \xrightarrow[{[-1,1]}]{cvs} h$
- h n'est pas continue en 0.

conclusion $(f'_n)_n \overset{cvu}{\underset{[-1,1]}{\not\longrightarrow}} h$.

3/ $g_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

Rq $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1,1]$

$$g'_n(x) = f_n(x)$$

- Etudions la convergence simple de $(g_n)_n$

soit $x \in [-1,1]$

- $x = 0 \quad g_n(0) = \frac{\ln(1)}{2n^2} = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

- $x \neq 0 \quad g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

croissance comparée

donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[-1,1]}]{CVS} g \equiv 0$

- Etudions la convergence uniforme de $(g_n)_n$ vers g sur $[-1,1]$.

soit $x \in [-1,1]$

$$g_n'(x) = f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

x	-1		0		1
V. g_n	$\frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$

$$\|g_n - g\|_\infty = \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[[-1,1]]{CVU} g$

<u>Autrement</u> on utilise le Th d'interversion limite dérivation

on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct g_n est de classe C^1 sur $[-1,1]$.
- La suite de fcts $(g_n')_n = (f_n)_n$ cvu vers f la fct nulle sur $[-1,1]$, (Question 1)
- $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[-1,1]}]{cvs} g$: la fct nulle

<u>Alors</u> $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[-1,1]}]{cvu} g$

et $g' = f$.

Exercice 5

$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ Etudions la convergence simple de la suite de fcts (f_n)

soit $x \in [0, 1]$.

- $x \in [0, 1/n]$

$$\left.\begin{array}{l} x \in [0, 1/n] \\ n \to +\infty, \quad 1/n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_n(0) = 0$$

- $x \notin [0, 1/n]$; $f_n(x) = 0$

<u>Conclusion</u>

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f = 0$$

2) $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$

$$= \int_0^{1/n} f_n(t)\,dt + \int_{1/n}^1 \underbrace{f_n(t)}_{=0}\,dt$$

$$= \int_0^{1/n} n^2 x(1 - nx)\,dx$$

$$= \left[\frac{n^2x^2}{2} - \frac{n^3x^3}{3}\right]_0^{1/n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1/6$$

On remarque que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}$$

$$= 1/6$$

$$\neq \int_0^1 \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(t)}_{=0} dt = 0$$

On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est continue sur $[0,1]$
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{cvs} f \equiv 0$
- $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt \neq \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,dt$

Alors d'après le Th d'interversion limite intégrale

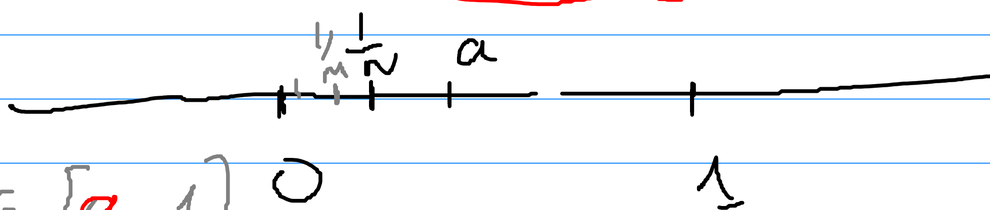
La suite de fcts (f_n) ne cv pas uniformément sur $[0,1]$ vers la fct nulle.

3) Soit $a \in]0,1[$,

Etudions la convergence uniforme sur $[a, 1]$

on a : $a > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$

tq $\boxed{a > \frac{1}{N} \geq \frac{1}{n}}$ $\forall n \geq N$



Soit $x \in [a, 1]$

$\forall n \geq N$, $f_n(x) = 0$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{n \to +\infty}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |0 - 0| = 0$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = 0$$

donc $(f_n)_n \xrightarrow[{[a,1]}]{CVU} f \equiv 0$

Exercice 6

- $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{n e^x}{n+x}$

$[a, b] = [0, 1]$

$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{n e^x}{n+x}$

(1)

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$

- Etudions la CV de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$

- CVS

soit $x \in [0,1]$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n e^x}{n} = e^x$

$(f_n) \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f : x \longmapsto e^x$.

CV U

soit $x \in [0,1]$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{n e^{x}}{n+x} - e^{x} \right|$$

$$= \left| - \frac{x e^{x}}{n+x} \right| = \frac{x e^{x}}{n+x}$$

$\forall x \in [0,1]$; $\begin{cases} x e^{x} \leq e^{1} \\ n+x \geq n \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x e^{x}}{n+x} \leq \frac{e^{1}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$= |f_n(x) - f(x)|$

donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{e}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{cvu} f$. ②

① et ② d'après le Th d'interversion limite intégrale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n e^x}{n+x}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

2/ $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{x^5}{(1+x^2)^n}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est une fct continue sur $[0, 1]$

2. L'étude de la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

• Convergence simple.

soit $x \in [0, 1]$.

• pour $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

• pour $x \in \,]0, 1]$, $1 + x^2 > 1$

donc la suite géométrique $(1 + x^2)^n$ tend vers $+\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^5}{(1+x^2)^n} = 0$

conclusion

$(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f = 0$

• Convergence uniforme.

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{x^5}{(1+x^2)^n}$$

$$f_n'(x) = \frac{5x^4(1+x^2)^n - 2n\, x^6 (1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}}$$

$$= \frac{5x^4(1+x^2) - 2n\, x^6}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x^4\left(5 + 5x^2 - 2n x^2\right)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\overset{\geq 0}{x^4}\left(5 - (2n-5)x^2\right)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2n-5}} \\ x \in [0,1] \end{cases} \qquad 2n-5>0, \quad n \geq 3$$

$\forall n \geq 5$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{2n-5}}$		1
signe f_n'	0	$+$	0	$-$	
V. f_n	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$\frac{1}{2^n}$

$x_0 = \left(\frac{5}{2n-5}\right)^{1/2}$

$$f(x_0) = f\left(\left(\frac{5}{2n-5}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(\frac{5}{2n-5}\right)^{5/2}}{\left(1+\frac{5}{2n-5}\right)^{n}}$$

$$= \left(\frac{5}{2n-5}\right)^{5/2} e^{-n \ln\left(1+\frac{5}{2n-5}\right)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{5}{2n-5}\right)^{5/2}}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}} \underbrace{e^{-n\left(\frac{5}{2n-5} + o\left(\frac{5}{2n-5}\right)\right)}}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ e^{-5/2}}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_0) = 0$$

$$\underbrace{\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right|}_{\|f_n - f\|_\infty} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} f(x_0) = 0$$

d'où $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[0,1]}]{CVU} f}$ ②

① et ② $\overset{\text{D'après le Th d'interversion limite intégrale}}{\Longrightarrow}$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{0}\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^n}\,dx = 0.$$

Rq On peut montrer que $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $]0,1]$ (sans l'étude de la variation de f_n) : soit $a\in]0,1[$, $\forall x\in[a,1]$

$$f_n(x) \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$ ne dépend pas de x

$$\frac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow (f_n)_n \xrightarrow[{[a,1]}]{CVU} f \quad \forall a \in]0,1[$$

$$\Downarrow$$

$(f_n)_n$ CV localement uniformément sur $]0,1]$.

Exercice 7 $\quad \forall n \geq 1$

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$$

1/ CVS

Soit $x \in [0,1]$.

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[{[0,1]}]{CVS} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto e^{-x}$

∘ CVU

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{ne^{-x} + x^2 - ne^{-x} - xe^{-x}}{n+x} \right|$$

$$= \left| \frac{x(x - e^{-x})}{n+x} \right|$$

$$\left|\frac{\underbrace{x^2}_{\leq 1}\ \underbrace{-\,x\,e^{-x}}_{\leq 0}}{\underbrace{n+x}_{\geq n}}\right| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}}$$

d'où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow[{[0,1]}]{cvu} f$.

2/ On a :

- $\forall n \geq 1$, la fct f_n est une fct continue sur $[0,1]$
- $(f_n)_{n \geq 1} \xrightarrow[{[0,1]}]{cvu} f$

d'après le Théorème d'interversion limite intégrale,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{f(x)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-e^{-1} \in \mathbb{R}.$$

d'où $(u_n)_n$ est une suite convergente.

Exercice 8

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

1/ soit $x \in [0,1]$.

- $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$
- $x \in]0,1]$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx} = (x^2+1)e^{-x}$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = (x^2+1)e^{-x}$$

La suite de fct $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ (x^2+1)e^{-x} & \text{sinon } x\in]0,1]. \end{cases}$

Rq $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$

2/ soit $\alpha \in]0,1[$

Etudions la convergence uniforme de la suite de fcts $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[\alpha, 1]$.

soit $x \in [\alpha, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^2+1)e^{-x} \right|$$

$$= \left| \frac{n(x^3+x)e^{-x} - n(x^3+x)e^{-x} - (x^2+1)e^{-x}}{nx+1} \right|$$

$$= \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1}$$

$\forall x \in [\alpha, 1]$

- $x^2+1 \leq 2$
- $e^{-x} \leq e^{-\alpha}$

$\Rightarrow (x^2+1)e^{-x} \leq 2e^{-\alpha}$

- $nx+1 \geq n\alpha+1 \Rightarrow \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{n\alpha+1}$

$\forall\ x \in [\alpha, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1} < \boxed{\frac{2e^{-\alpha}}{n\alpha+1}}$$

ne dépend pas de x et tend vers 0

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \underbrace{\frac{2e^{-\alpha}}{n\alpha+1}}_{\substack{n \to +\infty \\ \downarrow \\ 0}}$$

$$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[\alpha,1]}]{CVU} f \qquad \forall \alpha \in]0,1[$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur $]0, 1]$.

par contre d'après le Theoreme de convergence uniforme et continuite la suite de fct $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformement sur $[0,1]$ car :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la fct f_n est continue en 0
- $(f_n)_n \xrightarrow[{[0,1]}]{cvs} f$
- f n'est pas continue en 0.

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{n(x^2+x)\,e^{-x}}{nx+1}$$

1/ on a montré que $(f_n)_n$ cvs vers f

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (x^2+1)\,e^{-x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

2/ On a montré que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvu vers f sur $[\alpha, 1]$

En effet :

$\forall \alpha \in]0,1[$

$$\sup_{x\in[\alpha,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[\alpha,1]} \left| \frac{(x^2+1)\,e^{-x}}{nx+1} \right| \leq \frac{2\,e^{-\alpha}}{n\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Th. de cvu et continuité

- f n'est pas continue en 0
- $\forall n\in\mathbb{N}, f_n$ continue en 0

$\Rightarrow (f_n) \underset{[0,1]}{\overset{cvu}{\not\longrightarrow}} f$

3/ Montrons que $(|f_n(x) - f(x)|)_n$ est bornée

pour tout $x \in [0,1]$.

Soit $x \in]0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1} - (x^2+1)e^{-x} \right|$$

$$= \left| -\frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1} \right| = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1}$$

$\forall x \in [0,1]$, $\quad x^2+1 \leq 2 \qquad e^{-x} \leq 1$

$$nx+1 \geq 1$$

donc $|f_n(x) - f(x)| \leq 2 \quad \forall x \in]0,1]$

- pour $x = 0$ $\quad f(0) = 0$, $\quad f_n(0) = 0$

$\Rightarrow |f_n(0) - f(0)| = 0 \leq 2$

donc $\forall x \in [0,1]$, la suite $(|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$

est bornée.

4/ nature de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$?

4) $\int_0^1 f_n(t)\,dt = U_n$

soit $\alpha \in]0, 1[$

on pose $U_n^\alpha = \int_\alpha^1 f_n(t)\,dt$.

on a : • $\forall n \in \mathbb{N}$; la fct f_n est continue sur $[\alpha, 1]$

• $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[{[\alpha, 1]}]{cvu} f$

d'après le Th d'interversion limite intégrale

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^1 f_n(t)\,dt = \int_\alpha^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$$

$$= \int_\alpha^1 f(t)\,dt.$$

(*)

Donc $U_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\alpha^1 f(t)\,dt$

(Montrons que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$)

$$\Updownarrow$$

(Montrons que $\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$)

$$\Updownarrow$$

(Montrons que $\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

$$\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt = \int_0^\alpha (f_n(t)-f(t))\,dt + \int_\alpha^1 (f_n(t)-f(t))\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leq \int_0^\alpha \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leq \varepsilon \quad Q3}\,dt + \left|\int_\alpha^1 f_n(t) - f(t)\,dt\right|$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leq \varepsilon\int_0^\alpha dt + \left|\int_\alpha^1 (f_n(t)-f(t))\,dt\right|$$

$$(**) \Rightarrow \left|\int_0^1 f_n(t) - f(t)\right| dt \leq \varepsilon\alpha + \underbrace{\left|\int_\alpha^1 (f_n(t) - f(t))\,dt\right|}_{\substack{n\to+\infty \\ \downarrow \\ 0\ (*) \\ \text{Th. limite intégrale}}}$$

$n \to +\infty$

le passage à la limite dans $(**)$ implique

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leq \varepsilon\alpha$$

la passage à la limite lorsque α tend vers 0 implique

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))\,dt\right| = 0$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$

$$I = \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 (t^2+1)\, e^{-t}\, dt$$

$$u(t) = t^2 + 1 \qquad u'(t) = 2t$$

$$v'(t) = e^{-t} \qquad v(t) = -e^{-t}$$

$$I = \left[-(t^2+1)\, e^{-t}\right]_0^1 + 2\int_0^1 t\, e^{-t}\, dt$$

$u = t$ $\quad u' = 1$

$v' = e^{-t}$ $\quad v = -e^{-t}$

$$= -2e^{-1} + 1 + 2\left(\left[-t\, e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\, dt\right)$$

$$= -2e^{-1} + 1 + 2\left(-e^{-1} + \left[-e^{-t}\right]_0^1\right)$$

$$= -2e^{-1} + 1 + 2\left(-e^{-1} - e^{-1} + 1\right)$$

$$= -6e^{-1} + 3$$

Ex 9 $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$ φ continue sur $\mathbb{R}$

1| Mq $(f_n \circ \varphi)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f \circ \varphi$

$$\| f_n \circ \varphi - f \circ \varphi \|_\infty$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} | f_n(\varphi(x)) - f(\varphi(x)) |$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}} | f_n(y) - f(y) |$$

car on a: $f_n \xrightarrow{CVU} f$

$$= \| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_n \circ \varphi - f \circ \varphi \|_\infty = 0$$

2) Ψ une fct uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Mq $(\Psi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} \Psi \circ f$

Soit $\varepsilon > 0$

on a : $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} f$, d'après la condition de CVU de Cauchy

on a : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, \forall x \in \mathbb{R}$

$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$

or Ψ est uniformément continue

donc

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, \forall x \in \mathbb{R}$

$(|f_p(x) - f_q(x)| < \underset{\eta}{\varepsilon} \Rightarrow |\Psi(f_p(x) -$

$\psi(f_q(x))| < \varepsilon$

donc $(\psi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de CV u de Cauchy sur $\mathbb{R}$

donc $(\psi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVU} \psi \circ f$

<u>Rappel</u>

g est uniformément continue sur I

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I$

$$(|x - y| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon)$$

3/ $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

ψ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$

on montre le résultat par l'absurde

on suppose que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$(|x - y| < \eta \Rightarrow |\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon)$

on prend $\varepsilon = 1$,

$x = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta}$ $\qquad y = \frac{1}{\eta}$

$|x - y| = \left|\frac{\eta}{2}\right| < \eta \Rightarrow$

$|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon = 1$

$\Rightarrow \left|1 + \frac{\eta^2}{2}\right| < 1$ absurde

donc ψ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

- $f_n(x) = x + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

$(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} f = id_{\mathbb{R}}$

- $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| =$

$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f$

- $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} \varphi \circ f$??

$$\psi \circ f_n(x) = \psi\left(x + 1/n\right)$$

$$= \left(x + 1/n\right)^2$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi\left(f_n(x)\right)$

$$\|$$

$$x^2 = \psi(x)$$

$$\|$$

$$(\psi \circ f)(x)$$

$x_0 = n$

$$(\psi \circ f_n)(x_0) - \psi \circ f(x_0)$$

$$= 2x_0 \times \frac{1}{n} + 1/n^2$$

$$= 2 + 1/n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 \neq 0$$

a)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi\circ f_n(x) - \psi\circ f| \geqslant |\psi\circ f_n(x_0) - \psi\circ f(x_0)| \geqslant 2$$

$$\Rightarrow \|\psi\circ f_n - \psi\circ f\|_\infty \geqslant 2$$

$$\Rightarrow \psi\circ f_n \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVU}{\not\longrightarrow}} \psi\circ f$$

La continuité uniforme de ψ est une condition nécessaire pour que

$(\psi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur $\mathbb{R}$

vers $(\psi \circ f.)$

Exercice 10

Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + 1/n$$

$$g_n = \psi \circ f_n.$$

D'après l'exercice 9, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fct $f = id_{\mathbb{R}}$

1/ Montrons que la suite de fct $(g_n)_n$ converge simplement vers ψ

on a : soit $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1/n$$

$$= x$$

on applique la fct continue ψ

on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \psi \circ f_n(x) = \psi(x)$$

d'où $(\psi \circ f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} \psi$

2) Dans le cas général la convergence de $(\psi \circ f_n)_n$ n'est pas uniforme

car D'après l'exercice 9, il faut que la fct ψ soit uniformément continue car sinon par exemple

Pour $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

La suite $(\psi \circ f_n) \underset{\mathbb{R}}{\overset{cvu}{\not\longrightarrow}} \underbrace{\psi \circ f}_{\shortparallel \atop \psi}$

car $f = id_{\mathbb{R}}$

3/ ~~Mq~~ $\forall\ a, b \in \mathbb{R}.\ a < b$

$(\psi \circ f_n)_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvu} \psi \circ f$.

on a : ψ est continue sur $[a, b]$

Donc ψ est uniformement continue sur $[a, b]$. D'après la q 2 de l'exercice 9

$(\psi \circ f_n)_n \xrightarrow[{[a,b]}]{cvu} \psi \circ f = \psi$

Ex 3

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ nx^2 & x \in [0, 1/n] \\ (1-n^2)x^2 + 2x - 1/n & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 1/n & x \in [2/n ; +\infty[\end{cases}$$

1/ • soit $x \in]-\infty, 0]$

$$f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

• soit $x \in [0, \frac{1}{n}]$. $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_n(0) = 0$$

• si $x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$

$n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f_n(0) = 0$$

$x \in \left[\frac{2}{n} ; +\infty \right[$

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

conclusion $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CVS} f \equiv 0$

2) • soit $x \in]-\infty, 0]$

$$f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(f_n(x)) = f_n(0) = 0$$

• soit $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$

$$f_n(x) = n^2 x$$

prenons $x_0 = \frac{1}{n^4} \in [0, 1/n]$

$$(f_n(x_0)) = n^2 \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

$\Rightarrow f_n(f_n(x_0)) = n^2 f_n(x_0) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$

. or $f \circ f(x_0) = 0$ car f est la fct nulle

on a : $\lim_{n \to +\infty} f_n(f_n(x_0)) \neq f(f(x_0))$

donc la suite $(f_n \circ f_n)_n$ ne cv pas simplement vers $f \circ f$

Rq $(f_n) \overset{CVU}{\underset{\mathbb{R}}{\not\longrightarrow}} f$ car pour $x_1 = \frac{1}{n^2}$

on a : $f_n(x_1) = n^2 \cdot x_1 = 1 \Rightarrow$

$\underbrace{|f_n(x_1) - f(x_1)|}_{=1} \leq \|f_n - f\|_\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| \neq 0$

Remarque

si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f

$\cancel{\forall}$

$$(f_n \circ f_n)_n \xrightarrow[I]{CVS} f \circ f.$$

2) Mq

$$\left(\left((f_n)_n \xrightarrow[I]{CVU} f \right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ continue sur } I \right) \Longrightarrow \left((f_n \circ f_n)_n \xrightarrow[I]{CVS} f \circ f \right)$$

$\Rightarrow$ f continue

th. de cv unif et continuité

Pq $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim \left(f_n(f_n(x)) - f(f(x)) \right) = 0$$

soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(f_n(f_n(x)) - f(f(x)) \right) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(\underbrace{f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))}_{1} + \underbrace{f(f_n(x)) - f f(x)}_{2} \Big)$$

Montrons que :

$$\begin{cases} (1)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) \right) = 0 \\ (2)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(f(f_n(x)) - f(f(x)) \right) = 0 \end{cases}$$

(2). on a : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f$.

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{cvs} f$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(f_n(x)) = f(f(x))$$

car f est une fct continue sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(f_n(x)) - f(f(x)) = 0$$

Donc on a le resultat (2).

(1). on sait que $(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}.]{cvu} f$

donc $\sup_{X \in \mathbb{R}} |f_n(X) - f(X)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sup_{X \in \mathbb{R}} |f_n(X) - f(X)| = 0$$

$X = f_n(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} |f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))| = 0$$

(car $|f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))| \leq \sup_{X \in \mathbb{R}} |f_n(X) - f(X)|$)

d'où on a le resultat (1) c-à-d

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(f_n(x)) - f(f_n(x))) = 0$$

(1) et (2) $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (f_n(f_n(x)) - f(f(x))) = 0$

d'où $(f_n \circ f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} f \circ f$.

3/ Montrons que si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f alors $(f_n \circ f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f \circ f$.

soit $f_n : x \longrightarrow x^2 + 1/n$.

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = x^2$.

$(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvs} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

Mq $(f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\right| = 1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow (f_n)_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cvu} f$

soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$

$$f_n(f_n(x)) = (x^2 + 1/n)^2 + 1/n$$
$$= x^4 + 2x^2/n + 1/n^2 + 1/n$$

$$(f_n \circ f_n - f \circ f)(x) = x^4 + 2x^2/n + 1/n^2 + 1/n - x^4$$

$\Rightarrow \quad f_n(f_n(x)) - f(f(x)) = 2x^2/n + 1/n^2 + 1/n$

pour $x_0 = \sqrt{n}$

on a : $f_n(f_n(x_0)) - f(f(x_0)) = 2 + 1/n^2 + 1/n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 2$

or $\|f_n \circ f_n - f \circ f\|_\infty \geq \underbrace{|f_n(f_n(x_0)) - f(f(x_0))|}_{n \to +\infty \not\to 2}$

$\Rightarrow$

$\|f_n \circ f_n - f \circ f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$

d'où $f_n \circ f_n \overset{CVU}{\underset{\mathbb{R}.}{\not\to}} f \circ f$