TD2 : Systèmes Linéaires

1. Systèmes Linéaires

Exercice 1

1. Résoudre de deux manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss) :
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes :
$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Résoudre les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 3

En utilisant la méthode d'échelonnement en colonnes et en lignes, résoudre les systèmes linéaires suivants :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z - \lambda t = 2 \\ y - t = 1 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre les systèmes d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 \\ -2x + 3y - 5z + t = 0 \\ 3x - 4y + 7z - 3t = -5 \\ 2x + 3y + 8z + 2t = -6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + 2y - z + 3t = -1 \\ 3x + y + z + 2t = 6 \\ x - 3y + 3z - t = 5 \\ 5x + 5y - z + 7t = 5 \end{cases}$$

Exercice 5

Discuter selon m les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Discuter selon $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ les solutions des systèmes d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ suivants :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + ay + bz = a \\ x + by + az = b \\ ax + y + bz = a \\ bx + y + az = b \end{cases}$$

Exercice 7

Résoudre le système de n équations suivant, d'inconnue $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1 \end{cases}$$

2. Rang d'une Matrice

Exercice 9

Calculer le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres qui les définissent :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{pmatrix}, \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 10

Déterminer selon la valeur de a le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$