Cycle Pré-ingenieur
Première Année
Agèbre II - 2023/2024

Corrigé TD2 : Systèmes Linéaires

1. Systèmes Linéaires

Exercice 1

1. Par substitution

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+7y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3x+7(1-2x)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=-\frac{7}{11} \end{cases}$$

Par pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x+y=1 & \text{(L1)} \\ 3x+7y=-2 & \text{(L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-7(2x)=-2-7\times 1 & \text{(L2) - 7(L1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -11x=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=-\frac{7}{11} \end{cases}$$

2. (a) Utilisons la méthode par substitution

$$\begin{cases} ax+y=2 \\ (a^2+1)x+2ay=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-ax \\ (a^2+1)x+2a(2-ax)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-ax \\ (1-a^2)x=1-4a \end{cases}$$

Si $a^2=1$, $1-4a\neq 0$ donc le système n'a pas de solution.
Si $a^2\neq 1$,

$$S=\left\{\left(\frac{1-4a}{1-a^2}, \frac{2a^2-a+2}{1-a^2}\right)\right\}$$

(b) On résout en effectuant la somme et la différence

$$\begin{cases} (a+1)x+(a-1)y=1 \\ (a-1)x+(a+1)y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Si $a=0$, la première équation est équivalente à $0=1$ donc il n'y a pas de solution. $S=\emptyset$
Si $a\neq 0$, on effectuera à nouveau somme et différence :

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{a} \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2a} \\ y=\frac{1}{2a} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a} \right) \right\}$$

Exercice 2

a)

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \quad \text{(I)} \\ x - y = 0 \quad \text{(II)} \\ x + 4y + z = 0 \quad \text{(III)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x = y \\ 2x + 5y = 0 \quad \text{(III)} + \text{(I)} \end{cases}$$

En remplaçant y par x dans la dernière équation, on obtient $x = y = 0$ et $z = 0$ avec la première équation.

$$S = \{(0, 0, 0)\}$$

b)

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \quad \text{(I)} \\ -x + 2y - 3z = b \quad \text{(II)} \\ x + 2y + z = c \quad \text{(III)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \quad \text{(I)} \\ 5x + z = b + 2a \quad \text{(II)} + 2\text{(I)} \\ 7x + 5z = c + 2a \quad \text{(III)} + 2\text{(I)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \quad \text{(I)} \\ -18z = 7(b + 2a) - 5(c + 2a) \quad 7\text{(II)} - 5\text{(III)} \\ -18x = c + 2a - 5(b + 2a) \quad \text{(III)} - 5\text{(II)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ z = \frac{-4a - 7b + 5c}{18} \\ x = \frac{8a + 5b - c}{18} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8a + 5b - c}{18} \\ y = \frac{2a - b - 7c}{18} \\ z = \frac{-4a - 7b + 5c}{18} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \quad \text{(I)} \\ x - y - z = 1 \quad \text{(II)} \\ x + z = 3 \quad \text{(III)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \quad \text{(I)} - \text{(III)} \\ -y - 2z = -2 \quad \text{(II)} - \text{(III)} \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \\ -z = 0 \quad \text{(I)} + \text{(II)} \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(3, 2, 0)\}$$

Exercice 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \text{(I)} \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \quad \text{(II)} \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \quad \text{(III)} \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

— On peut utiliser le pivot de Gauss sur la première équation.
— On peut également effectuer les demi-sommes ou les demi-différences des équations 2 à 2 pour obtenir des simplifications importantes.
— Plus rapidement, si on effectue la somme de toutes les équations, on obtient : $4x_1 = 0$
Ensuite $(I) + (II)$ permet de conclure que $x_2 = 0$
Puis $(I) + (IV)$ permet de conclure que $x_4 = 0$
Et enfin avec n'importe quelle équation on obtient $x_3 = 1$
On vérifie que $(0, 0, 1, 0)$ est bien solution donc $S = \{(0, 0, 1, 0)\}$

Exercice 4

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 & L_1 \\ -2x + 3y - 5z + t = 0 & L_2 \\ 3x - 4y + 7z - 3t = -5 & L_3 \\ 2x + 3y + 8z + 2t = -6 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 & L_1 & \\ 7y + z + 5t = 0 = 0 & L_2 & \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ 10y + 2z + 9t = 5 & L_3 & \leftarrow 3L_1 - L_3 \\ y - 2z + 2t = 6 & L_4 & \leftarrow 2L_1 - L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 & L_1 & \\ 7y + z + 5t = 0 = 0 & L_2 & \\ 4z + 13t = 35 & L_3 & \leftarrow 7L_3 - 10L_2 \\ 15z - 9t = -42 & L_4 & \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0 & L_1 & \\ 7y + z + 5t = 0 = 0 & L_2 & \\ 4z + 13t = 35 & L_3 & \\ 231t = 693 & L_4 & \leftarrow 15L_3 - L_4 \end{cases}$$

D'où l'ensemble solution réduit à un élément : $S = \{(1; -2; -1; 3)\}$.

Exercice 5

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x+2y-z+3t=-1 & L_1 \\ 3x+y+z+2t=6 & L_2 \\ x-3y+3z-t=5 & L_3 \\ 5x+5y-z+7t=5 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+3t=-1 & L_1 & \\ 5y-4z+7t=-9 & L_2 & \leftarrow 3L_1-L_2 \\ 5y-4z+4t=-6 & L_3 & \leftarrow L_1-L_3 \\ 5y-4z+8t=-10 & L_4 & \leftarrow 5L_1-L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+3t=-1 & L_1 & \\ 5y-4z+7t=-9 & L_2 & \\ 3t=-3 & L_3 & \leftarrow L_2-L_3 \\ t=-1 & L_4 & \leftarrow L_4-L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 5y-4z=-2 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-z=-x+2 & L_1 \\ 5y-4z=-2 & L_2 \\ t=-1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+2y-2 & L_1 & \\ 3y=-4x+10 & L_2 & \leftarrow 4L_1-L_2 \\ t=-1 & L_3 & \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve l'ensemble infini de solutions :

$$S=\{x;-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3};-\frac{5}{3}x+\frac{14}{3};-1 \mid x\in\mathbb{C}\}$$

Exercice 6

1. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x-y+z=m & L_1 \\ x+my-z=1 & L_2 \\ x-y-z=1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=m & L_1 & \\ (m+1)y-2z=1-m & L_2 & \leftarrow L_2-L_1 \\ 2z=m-1 & L_3 & \leftarrow L_1-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\dfrac{m+1}{2} \\ (m+1)y=0 \\ z=\frac{m-1}{2} \end{cases}$$

1er cas : $m=-1$. Le système admet une solution infinie :

$$S=\{(y,y,-1)\mid y\in\mathbb{C}\}$$

2nd cas : $m\neq-1$. Le système admet une solution unique :

$$S=\left\{\left(\frac{m+1}{2},0,\frac{m-1}{2}\right)\right\}$$

2.

$$\begin{cases} x+\quad y+mz+t=m+1 & L_1\\ x+my+\quad z+t=m & L_2\\ mx+\quad y+\quad z+t=1 & L_3\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\quad y+\quad mz+\quad t=m+1 & L_1 & \\ \quad (m-1)y+\ (1-m)z \quad =1 & L_2 & \leftarrow L-2-L_1\\ \quad (1-m)y+(1-m^2)z+(1-m)t=-m^2-m+1 & L_3 & \leftarrow L-3-mL_1\end{cases}$$

1er cas : $m=1$. Le système équivaut alors à :

$$\begin{cases} x+\ y+\ z+\ t=2\\ \quad 0y+0z \quad =1\\ \quad 0y+0z+0t=1\end{cases}$$

L'ensemble des solutions est alors vide.
2nd cas : $m\neq 1$. Le système équivaut alors à :

$$\begin{cases} x+y+\quad mz+t=m+1\\ \quad y-\quad z \quad =\dfrac{1}{m-1}\\ \quad y+(m+1)z+t=\dfrac{m^2+m-1}{m-1}\end{cases}$$

Ce qui donne le système final :

$$\begin{cases} x+y\quad +t=-mz+m+1\\ \quad y\quad =z+\dfrac{1}{m-1}\\ \quad t=\frac{m(m+1)}{m-1}-(m+2)z\end{cases}$$

L'ensemble des solutions est alors infini :

$$S=\left\{z-\frac{m}{m-1}, z-\frac{1}{m-1}, z, \frac{m(m+1)}{m-1}-(m+2)z \mid z\in\mathbb{C}\right\}$$

Exercice 7

1. On applique Pivot de Gauss

$$\begin{cases} ax+\ by+\ z=1 & L_1\\ x+aby+\ z=b & L_2\\ x+\ by+az=1 & L_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\quad by+\quad az=1 & L_1 & \\ \quad b(a-1)y+\ (1-a)z=b-1 & L_2 & \leftarrow L_2-L_1\\ \quad b(1-a)y+(1-a^2)z=1-a & L_3 & \leftarrow L_3-aL_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\quad by+\quad az=1 & L_1 & \\ \quad b(a-1)y+\quad (1-a)z=b-1 & L_2 & \\ \quad (1-a)(2+a)z=b-a & L_3 & \leftarrow L_3+L_2\end{cases}$$

— 1er cas : $a \notin \{-2, 1\}$. Deux nouveaux cas se présentent :
  — Si $b \neq 0$, l'ensemble des solutions est réduit à un unique élément :

$$S = \left\{ \frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \right\}$$

  — Si $b = 0$, le système équivaut à :

$$\begin{cases} x \quad + \qquad\qquad az = 1 \\ \qquad\qquad (1-a)z = -1 \\ \qquad (1-a)(2+a)z = b - a \end{cases}$$

  Le système n'a alors de solutions que lorsque $a = a + 2$, ce qui n'est jamais vérifié. Donc dans ce cas, l'ensemble solution est vide.

— 2e cas : $a = 1$. Deux nouveaux cas se présentent :
  — Si $b \neq 1$, l'ensemble des solutions est vide.
  — Si $b = 1$, alors $S = \{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$.

— 3e cas : $a = -2$. Le système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} x + \ \ by - 2z = 1 \\ \quad - 3by + 3z = b - 1 \\ \qquad\qquad 0z = b + 2 \end{cases}$$

Deux nouveaux cas se présentent :
  — Si $b \neq -2$, l'ensemble des solutions est vide.
  — Si $b = -2$, alors le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ \qquad 2y + \ \ z = -1 \\ \qquad\qquad 0z = 0 \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est alors l'ensemble infini :

$$S = \{(-1 - 2y, y, -1 - 2y) \mid y \in \mathbb{C}\}$$

2.

$$\begin{cases} x + ay + bz = a & L_1 \\ x + by + az = b & L_2 \\ ax + \ \ y + bz = a & L_3 \\ bx + \ \ y + az = b & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad ay + \quad bz = a & L_1 & \\ \quad (b-a)y - (b-a)z = b - a & L_2 & \leftarrow L_2 - L_1 \\ ax + \quad y + \quad bz = a & L_3 & \\ (b-a)x \qquad - (b-a)z = b - a & L_4 & \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

— 1er cas : $a \neq b$. Le système équivaut alors à :

$$\begin{cases} \qquad (a + b + 1)z = -1 \\ \quad y \qquad\qquad = z + 1 \\ x \qquad\qquad\quad = z + 1 \end{cases}$$

Deux nouveaux cas se présentent :

— Si $a+b \neq -1$, l'ensemble des solutions est réduit à un élément :

$$S = \left\{ \frac{a+b}{a+b+1}, \frac{a+b}{a+b+1}, -\frac{1}{a+b+1} \right\}$$

— Si $a+b=-1$, l'ensemble des solutions est vide.

— 2nd cas : $a=b$. Le système équivaut alors à :

$$\begin{cases} x+ay+az=a \\ ax+\ \ y+az=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay &= a(1-z) \\ ax+\ \ y &= a(1-z) \end{cases}$$

Trois nouveaux cas se présentent :

— Si $a=1$, l'ensemble des solutions est l'ensemble infini $S = \{(x,y,1-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{C}^2\}$.

— Si $a=-1$, le système équivaut à : $\begin{cases} x=y, \\ z=1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est l'ensemble infini $S = \{(x,x,1) \mid x \in \mathbb{C}\}$.

— Si $a \notin \{-1,1\}$, l'ensemble des solutions est l'ensemble infini :

$$S = \left\{ \frac{a}{a+1}(1-z), \frac{a}{a+1}(1-z), z \right\}$$

Exercice 8

Résoudre le système de n équations suivant, d'inconnue $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_n & =1, & L_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \ldots & + & 2x_n & =1, & L_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & 3x_n & =1, & L_3 \\ & & & & & & \vdots & & & & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & nx_n & =1, & L_n \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_n & =1, & L_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_n & =1, & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & & & x_3 & + & \ldots & + & x_n & =1, & L_2 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & =1, & L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2} \\ & & & & & & & & x_n & =1. & L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que l'ensemble solution est réduit à un élément : $S = \{(1,0,0,\ldots,0)\}$.

1 Rang d'une matrice

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-2I \\ III-I \end{array}$$

Une seule ligne ne contient pas que des 0 donc le rang de la matrice est 1

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I/2 \\ II \\ III/3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-I \\ III-I \end{array}$$

Le rang de la matrice est 2.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t-1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-I \\ III-I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & -(t-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-I(t-1) \\ III \end{array}$$

Si $t = 1$, le rang est 1.
Si $t \neq 1$, le rang est 2.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II+I \\ III-4I \\ IV-I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III-II \\ IV+3II \end{array}$$

Il y a une seule ligne de 0 et 3 lignes non complètement nulles donc le rang est 3.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & ca-bc & ab-bc \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-(b+c)I \\ III-bcI \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III-cII \end{array}$$

Si $a = b = c$, le rang est 1 (2 lignes de 0).
Si $a \neq b$ et $a \neq b$ et $a \neq c$, le rang est 3.
Sinon : si $a = b$, $c \neq a$, le rang est 2 car $a \neq c$.
Si $a = c$, $b \neq a$, le rang est 2 car $a \neq c$.
Si $b = c$, $a \neq b$, le rang est 2 car $a \neq c$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 0 & \cos(2x)-\cos^2 x & \cos(3x)-\cos x\cos(2x) \\ 0 & \cos(3x)-\cos x\cos 2x & \cos(4x)-\cos(2x)^2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II-\cos(x)I \\ III-\cos(2x)I \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 0 & -\sin^2 x & -\sin x \sin(2x) \\ 0 & -\sin x \sin 2x & -\sin^2 2x \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 0 & -\sin^2 x & -2\sin^2 x \cos x \\ 0 & -2\sin^2 x \cos x & -4\sin^2 x \cos^2 x \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 0 & -\sin^2 x & -2\sin^2 x \cos x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \\ III - 2\cos(x) II \end{array}$$

Si $x \equiv \pi\ [2\pi]$ alors $\text{rang}(F) = 1$
Si $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$ alors $\sin x \neq 0$ donc $\text{rang}(F) = 2$

Exercice 2

On applique pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & -a^4 & a-a^5 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a-a^5 \\ 0 & 1-a^4 & a-a^5 & a^2-a^6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & -a^4 & a-a^5 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a-a^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}$$

Si $a^4 = 1$ le rang est 1 car les lignes 2, 3 et 4 sont nulles. Dans tous les autres cas, le rang est 4.

On peut également procéder de la manière suivante : on soustrait à une ligne a fois la ligne précédente. On obtient plus rapidement le même résultat :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & -a^4 & a-a^5 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a-a^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}$$