CY Tech

TD Analyse

Suites.

Exercice 1

Donner un exemple de suite :

1. Croissante et majorée.
2. Ni croissante, ni décroissante.
3. Ni majorée, ni minorée.

Solution : Pour chaque point nous allons donner un exemple, mais ces exemples ne sont pas les seuls. Essaye de trouver des autres exemples de suites satisfaisant les propriétés demandées.

1. **Croissante et majorée :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Donc u_n est croissant. De même

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ -\frac{1}{n+1} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Donc u_n est majorée.

Exercice 1

2. **Ni croissante, ni décroissante :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Notons que

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 + 4k, \ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 2k, \ k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 3 + 4k, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors u_n n'est ni croissante, ni décroissante.

3. **Ni majorée, ni minorée :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons que

$$\lim_{k \to +\infty} u_{2k} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} u_{2k+1} = -\infty.$$

Alors u_n n'est ni majorée, ni minorée.

Exercice 2

Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

1. La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
2. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
3. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Solution :

1. La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \quad u_n \geq 0.$$

2. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ u_n = u_N.$$

3. La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ u_{n+1} \geq u_n.$$

Exercice 3

Déterminer les limites des suites ci-après en revenant à la définition (avec les quantificateurs) :

$a)\quad u_n = \dfrac{n+1}{n+2} \qquad b)\quad v_n = \dfrac{n^2+1}{n+1} \qquad c)\quad w_n = -3 \times 2^{n+1}$

Exercice 3

(a) $\mathrm{u_n} = \frac{\mathrm{n+1}}{\mathrm{n+2}}$: Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Maintenant, pour montrer l'égalité précédente en revenant à la définition de la limite, on doit vérifier

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies |u_n - 1| < \epsilon)\,.$$

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 1| < \epsilon.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\begin{aligned}
\forall n \geq N,\ \left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \epsilon \quad &\iff \quad \forall n \geq N,\ \left|\frac{n+1-(n+2)}{n+2}\right| < \epsilon \\
&\iff \quad \forall n \geq N,\ \frac{1}{n+2} < \epsilon \\
&\iff \quad \forall n \geq N,\ \frac{1}{\epsilon} < n+2 \\
&\iff \quad \forall n \geq N,\ \frac{1}{\epsilon} - 2 < n.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Ainsi

$$|u_n - 1| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} - 2 \leq n.$$

Posons $N = E\left(\frac{1}{\epsilon} - 2\right) + 1$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \frac{1}{\epsilon} - 2 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - 1| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 3

(b) $\mathsf{v_n} = \frac{\mathsf{n}^2+1}{\mathsf{n}+1}$: Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n+\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}} = +\infty.$$

Maintenant, pour montrer l'égalité précédente en revenant à la définition de la limite, on doit vérifier

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies v_n > M)\,.$$

Soit $M > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad v_n > M.$$

Or on sait que

$$n^2+1 > n^2-1 \quad \implies \quad \frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n-1$$

Donc il suffit de garantir

$$n-1 > M \ \text{ pour obtenir } \ \frac{n^2+1}{n+1} > M.$$

Sachant que

$$n - 1 > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > M + 1,$$

il suffit de poser

$$N = E(M+1) + 1.$$

Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n > M + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n^2+1}{n+1} > M \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

Exercice 3

(c) $\mathrm{w_n} = -3 \cdot 2^{\mathrm{n}+1}$: Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} -3 \cdot 2^{n+1} = -3 \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 2^n = -6 \lim_{n\to\infty} 2^n = -6 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Maintenant, pour montrer l'égalité précédente en revenant à la définition de la limite, on doit vérifier

$$\forall m < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies w_n < m)\,.$$

Soit $m < 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad w_n < m.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$\begin{aligned} -3 \cdot 2^{n+1} < m \iff 2^{n+1} > -\frac{m}{3} \quad &\iff \quad \ln\left(2^{n+1}\right) > \ln\left(\frac{-m}{3}\right) \\ &\iff \quad (n+1)\ln(2) > \ln\left(\frac{-m}{3}\right) \\ &\iff \quad (n+1) > \frac{\ln\left(\frac{-m}{3}\right)}{\ln(2)} \\ &\iff \quad n > \frac{\ln\left(\frac{-m}{3}\right)}{\ln(2)} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 3

Ainsi

$$w_n < m \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{-m}{3}\right)}{\ln(2)} - 1.$$

Posons $N = E\left(\frac{\ln\left(\frac{-m}{3}\right)}{\ln(2)} - 1\right) + 1$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \frac{\ln\left(\frac{-m}{3}\right)}{\ln(2)} - 1 \quad \Longrightarrow \quad w_n < m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty.$$

Exercice 4

Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :

$a)\ \dfrac{10^{92}n^2}{n+n^3}$ $\quad b)\ \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ $\quad c)\ \dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n+\sqrt{n}}$

$d)\ \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ $\quad e)\ \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$ $\quad f)\ \dfrac{(-1)^n+n}{n+7\sqrt{n}}$

$g)\ \dfrac{(-3)^n+7^n}{2^n+5^n}$ $\quad h)\ \dfrac{n^2+\cos n}{\sin(n)-3n^2}$ $\quad i)\ \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dots\dfrac{n}{n^2}$

<u>À faire chez soi :</u>

$j)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\quad k)\ \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ $\quad l)\ \dfrac{2^n-3^{n+1}}{5^{2n}}$

$m)\ \sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+n+1}$

Solution :

a) $u_n=\frac{10^{92}n^2}{n+n^3}$: Nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^{92}n^2}{n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}\cdot\frac{10^{92}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1}=10^{92}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1}=10^{92}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+1}=\frac{0}{1}=0.$$

Exercice 4

b) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$: Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

c) $u_n = \frac{\sqrt{n}\cdot\sin(n)}{n+\sqrt{n}}$: Nous avons

$$\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\sin(n)\right)}{\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\sin(n)}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(n)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sin(n)}{n+\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(n)}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin(n)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 4

d) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

(e) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$: Nous avons

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} = (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{n^2+n+1-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - (\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\cdot(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}+\sqrt{n^2\cdot(1+\frac{1}{n^2})}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

(f) $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n+7\sqrt{n}}$: Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + n}{n+7\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{1+7\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n}+1}{1+7\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}+1}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1+7\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(g) $u_n = \frac{(-3)^n+7^n}{2^n+5^n}$: Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-3)^n+7^n}{2^n+5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n}{5^n} \cdot \frac{\left(-\frac{3}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n}{5^n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}\right)$$

$$= (+\infty) \cdot (1) = +\infty.$$

(h) $u_n = \frac{n^2+\cos n}{\sin(n)-3n^2}$: Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\cos n}{\sin(n)-3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{\cos n}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^2}-3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{\cos n}{n^2}}{\frac{\sin(n)}{n^2}-3} = -\frac{1}{3}$$

Exercice 4

(i) $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots \frac{n}{n^2}$: Nous avons

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots \frac{n}{n^2} \\ &= \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4

(j) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: Nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

(k) $u_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$: Nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+(1-2)}{\sqrt{n}+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} - \frac{2}{\sqrt{n}+1} \\ &= 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}+1} = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Exercice 4

(I) $u_n = \frac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}}$: Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{25}\right)^n \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{25}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Exercice 4

(m) $u_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+n+1}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+n+1} &= \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+n+1}\right) \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2+n+1}} \\
&= \frac{n^2+2n+3-(n^2+n+1)}{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2+n+1}} \\
&= \frac{n+2}{\sqrt{n^2+2n+3} + \sqrt{n^2+n+1}} \\
&= \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n\sqrt{1+2\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+2\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+2\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

Étudier les suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, avec $a, b > 0$
2. $u_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, avec $a > 0$

Solution :

(1) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$: Nous avons trois cas à étudier. Si $a = b$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n - b^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Si $a > b$, alors on écrit

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{a^n}{a^n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Puisque $0 < \frac{b}{a} < 1$ on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exercice 5

Si $b > a$, alors on écrit

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n}{b^n} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}.$$

Puisque $0 < \frac{a}{b} < 1$ on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = -1.$$

Exercice 5

(2) $u_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, avec $a > 0$: Nous avons

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = 1, \\ \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = +\infty & \text{si } a = 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

Maintenant

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq a < 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 1 + \cdots + a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \geq 1, \\ \frac{1}{1-a} & \text{si } 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

Exercice 6

Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

   Indication : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2}$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\dfrac{n^2 + 2n + 3}{n+1}\pi\right)$

<u>À faire chez soi :</u>

$a)\quad n^{\frac{1}{n}} \qquad b)\quad \ln\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)$

Exercice 6

(1) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$: Si $x=0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1.$$

Supposons $x \in \mathbb{R}^*$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x}{x}\cdot n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$.
- $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{x}{n},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} \left(x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = x.$$

Exercice 6

Finalement, notons que

$$\lim_{t \to x} \exp(t) = \exp(x).$$

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(t) = \exp(t) \quad \text{et} \quad u_n = x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = \exp(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Exercice 6

(2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$: Commençons par noter que

$$\sqrt[n]{n^2} = n^{\frac{2}{n}} = \exp\left(\ln\left(n^{\frac{2}{n}}\right)\right) = \exp\left(\frac{2}{n}\ln(n)\right).$$

Notons maintenant que

quand x tend vers 0, l'application e^x tends vers 1.

Par conséquent, en démontrant que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\ln(n) = 0,$$

le **Théorème de composition à gauche** , avec

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{2}{n}\ln(n),$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{2}{n}\ln(n)\right) = 1.$$

Exercice 6

Montrons donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(n) = 0.$$

Pour cela, on commence par noter que

- $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x < e^x \quad \Longrightarrow \quad \ln(x) < x.$$

- $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = (\sqrt{n})^2 \quad \Longrightarrow \quad \ln(n) = \ln\left((\sqrt{n})^2\right) = 2\ln(\sqrt{n}).$$

  Grâce au point précédent on obtient donc l'inégalité

  $$\ln(n) = 2\ln(\sqrt{n}) < 2\sqrt{n}.$$

D'où on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \ln(n) = 2\ln\left(\sqrt{n}\right) < 2\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{\ln(n)}{n} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

D'après le **Théorème d'Encadrement** nous pouvons donc écrire

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Exercice 6

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

du **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, on conclut

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{2}{n}\ln(n)\right) = 1.$$

Exercice 6

(3) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$: Nous avons

$$\sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right) = \sin\left((n+1)\pi + \frac{2\pi}{n+1}\right) = \cos((n+1)\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos((n+1)\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right).$$

Maintenant

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n+1} = 0.$
- Quand x tend vers 0, l'application $\sin(x)$ tend vers 0.

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{2\pi}{n+1},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Exercice 6

Finalement, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$-1 \leq \cos((n+1)\pi) \leq 1.$$

Nous pouvons écrire

$$-\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \leq \cos((n+1)\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right).$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned} 0 = -\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\cos((n+1)\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) &\leq \lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos((n+1)\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Exercice 6

(a) $\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}}$: Nous avons

$$n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Maintenant

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$
- Quand x tend vers 0 par la droite, l'application $\exp(x)$ tend vers 1.

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\ln(n)}{n},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1.$$

Exercice 6

(b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1+n}{n^2}\right)$: Notons que

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1+n}{n^2} = 0$.
- Quand x tend vers 0 par la droite, l'application $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, , avec

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{1+n}{n^2},$$

nous permet donc de conclure

$$\ln\left(\frac{1+n}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Exercice 7

Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :

$a)\quad ne^{-n} \qquad b)\quad \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

$c)\quad \dfrac{E(nx)}{n} \qquad d)\quad \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cos\left(e^n\right)$

$e)\quad \dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 7

(a) $u_n = \frac{n}{e^n}$: On commence par noter que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x < e^x \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{2} < e^{\frac{n}{2}}$$
$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n^2}{4} < \left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^n.$$

Ce qui entraine que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{e^n} < \frac{4}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{n}{e^n} < \frac{4}{n}.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$$

Exercice 7

(b) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$: On commence par noter que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n, \quad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

D'où on conclut

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 7

(c) $u_n = \frac{E(nx)}{n}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$nx - 1 < E(nx) \leq nx \quad \Longrightarrow \quad \frac{nx-1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq \frac{nx}{n} = x$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{nx-1}{n} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n} \leq x.$$

D'où on conclut

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(nx)}{n} = x.$$

Exercice 7

(d) $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cos\left(e^n\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$-1 \leq \cos\left(e^n\right) \leq 1.$$

Ce qui implique que

$$-\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cos(e^n) \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$-\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cos(e^n) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Maintenant

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

D'où on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cos\left(e^n\right) = 0.$$

Exercice 7

Autre Méthode : Nous avons le résultat suivant :

Théorème (Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = 0.$$

Puisque

- $(\cos(e^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (En effet $-1 \leq \cos(e^n) \leq 1$).
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

Le théorème nous permet donc de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cos(e^n) = 0.$$

Exercice 7

(e) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ on a

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ \cdots \ \times n < 1 \times 2 \times \underbrace{n \times n \times \ \cdots \ \times n}_{n-2 \quad \text{fois}} = 2n^{n-2}.$$

D'où on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n! \leq 2n^{n-2} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n^{n-2}}{n^n} = \frac{2}{n^2}$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Exercice 8

Soit x un réel.

1. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + ... + E(nx)}{n^2}$
2. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

(1) Déterminer la limite de u_n.

Solution : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$kx - 1 < E(kx) \leq kx.$$

Par conséquent

$$\frac{x + 2x + \cdots + nx - n}{n^2} < \frac{E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx)}{n^2} \leq \frac{x + 2x + \cdots + nx}{n^2}$$

Maintenat

$$\begin{aligned}
\frac{x + 2x + \cdots + nx - n}{n^2} &= \frac{x(1 + 2 + \cdots + n) - n}{n^2} = x \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \\
\frac{x + 2x + \cdots + nx}{n^2} &= \frac{x(1 + 2 + \cdots + n)}{n^2} = x \frac{n(n+1)}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 8

D'où on obtient

$$x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < u_n \leq x\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc de conclure

$$\frac{x}{2} = \lim_{n\to+\infty} x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} x\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}.$$

Exercice 8

(2) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. **Solution :** On commence par donner le résultat suivant.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la densité)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors

A est dense dans $\mathbb{R}$ $\iff$ Tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ définissons la suite (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = 2u_n = 2\frac{E(x) + E(2x) + ... + E(nx)}{n^2}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \in \mathbb{Q},$$

et d'après la partie (1) de l'exercice

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 2 \cdot \lim_{n \to +\infty} u_n = 2 \cdot \frac{x}{2} = x.$$

Ainsi $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Démontrer la propriété si elle est vrai, donner un contre exemple sinon.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
3. Si la suite (u_n) converge vers l, alors $\forall p \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+p} - u_n = 0$.
4. Si les suites (x_n) et (y_n) divergent alors la suite $(x_n + y_n)$ diverge.
5. Si les suites (x_n) et (y_n) divergent alors la suite $(x_n y_n)$ diverge.
6. Pour toute suite de réels (y_n), si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.
7. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ alors soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ soit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. (*Indication* : considérer l'exemple $x_n = (1 + (-1)^n)/2, \quad y_n = (1 - (-1)^n)/2$).
8. Si (u_n) est convergente et les u_n sont strictement positifs, alors la limite de (u_n) est strictement positive.
9. Si (u_n) est une suite croissante et $u_n \leq 7$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 7$.

Exercice 9

(1) **Si** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **:** Faux. En effet, il suffit pour tout $n \in \mathbb{N}$ de choisir

$$u_n \leq a < 0,\ a \in \mathbb{R}_-^*.$$

Par exemple, soit $u_n = -2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors

$$u_n < v_n \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -2 < 0.$$

(2) **Une suite non majorée tend vers** $+\infty$ **:** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair,} \\ -n & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Exercice 9

(3) **Si la suite (u_n) converge vers l, alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} - u_n \underset{+\infty}{\to} 0$.** Vrai. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc pour tout $n > N$, on a $n + p > N$ et

$$|u_{n+p} - u_n| = |u_{n+p} + (l - l) - u_n| \leq |u_{n+p} - l| + |l - u_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+p} - u_n = 0$.

(4) **Si les suites (x_n) et (y_n) divergent alors la suite $(x_n + y_n)$ diverge.** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons

$$y_n = -x_n \quad \Longrightarrow \quad x_n + y_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = 0.$$

Par exemple, soit $u_n = n$ et $v_n = -n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \quad \text{mais} \quad u_n + v_n = 0.$$

Exercice 9

(5) **Si les suites (x_n) et (y_n) divergent alors la suite $(x_n y_n)$ diverge.** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad \text{et} \quad y_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc

$$x_n \cdot y_n = -1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} x_n \cdot y_n = -1.$$

(6) **Pour toute suite de réels (y_n), si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ alors $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y_n = n^a \quad \text{avec } a > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \to +\infty} n^{a-1} = +\infty.$$

Exercice 9

(7) **Si** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ **alors soit** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ **soit** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$x_n = \frac{(1+(-1)^n)}{2} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{(1-(-1)^n)}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_n \cdot y_n = \frac{(1-(-1)^{2n})}{4} = 0.$$

mais les limites $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ n'existent pas.

(8) **Si** (u_n) **est convergente et les** u_n **sont strictement positifs, alors la limite de** (u_n) **est strictement positive.** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(9) **Si** (u_n) **est une suite croissante et** $u_n \leq 7$ **alors** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 7$**.** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = m - \frac{1}{n},\ m < 7 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = m < 7.$$

Exercice 10

Démontrer la propriété si elle est vrai, donner un contre exemple sinon.

1. Toute suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. Toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante.
3. Si la suite $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge. Formuler et étudier sa réciproque.
4. Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_{2p} est positif et u_{2p+1} est négatif, alors la suite (u_n) diverge.
5. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$ alors la suite (u_n) converge.
6. Si (u_n) est croissante, alors (u_n) tends vers $+\infty$.
7. Si $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{2}$ alors la suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.
8. Toute suite monotone est convergente.
9. Toute suite croissante et majorée est bornée.
10. Si la suite (u_n) est décroissante et $\forall n \ u_n \geq 0$, alors (u_n) tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 10

(1)**Toute suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang** : Vrai. En effet, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Alors d'après la définition de la limite, pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, nous avons

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - L| < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a

$$L - \frac{1}{2} < u_n < L + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_n \in \left]L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2}\right[.$$

Maintenant, dans l'intervalle $\left]L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2}\right[$ il existe **au plus un entier**. Or pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n$ est un entier, donc

$$\forall n \geq N,\ u_n \in \left]L - \frac{1}{2}, L + \frac{1}{2}\right[\cap \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \forall n \geq N,\ u_n = u_N.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire (au moins) à partir de N, et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L = u_N.$$

Exercice 10

(2) **Toute suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante :** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u_{2n} > u_{2n+1} \ \text{ et } \ u_{2n+1} < u_{2n+2}.$$

Exercice 10

(3) **Si la suite $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge. Formuler et étudier sa réciproque :** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair,} \\ \\ -1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |u_n| = 1.$$

Montrons la proposition réciproque : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L et montrons que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|L|$. Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - L| < \epsilon.$$

Maintenant, à l'aide de l'inégalité triangulaire, nous pouvons d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N,\ ||u_n| - |L|| \ < \ |u_n - L| \ < \ \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |L|.$$

Exercice 10

(4) **Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_{2p} est positif et u_{2p+1} est négatif, alors la suite (u_n) diverge :** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair,} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 10

(5) **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ **alors la suite** (u_n) **converge.** Vrai. En effet, soit $\epsilon > 0$. Alors existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N$, nous avons

$$|nu_n - 1| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad 1-\epsilon < nu_n < 1+\epsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-\epsilon}{n} < u_n < \frac{1+\epsilon}{n}.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc de conclure

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\epsilon}{n} \leq u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\epsilon}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(6) **Si** (u_n) **est croissante, alors** (u_n) **tends vers** $+\infty$ **:** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = 2 - \frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Exercice 10

(7) **Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$ alors la suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang :** Vrai. En effet, soit $\epsilon = \frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n > N \quad \Longrightarrow \quad \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad 0 < u_n < 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall n > N$ on a $u_n > 0$.

(8) **Toute suite monotone est convergente :** Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(9) **Toute suite croissante et majorée est bornée :** Vrai. En effet, on sait que toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. De plus toute suite convergente est bornée.

Exercice 10

(10) **Si la suite (u_n) est décroissante et $\forall n \; u_n \geq 0$, alors (u_n) tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$:**Faux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = 2 + \frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 11

Montrer que les suites suivants divergent :

(1) $a_n = n\sin(\frac{n\pi}{2})$.

(2) $b_n = \frac{(-1)^n n^3 + 3n^2 + 5}{2 - 5n^3}$.

(3) $c_n = (-1)^n \frac{n}{1+n} \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right)$.

Exercice 11

Montrer que la suite
$$a_n = n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$
diverge.

Solution : Notons que si on choisit
$$\phi_1(n) = 2n \quad \text{et} \quad \phi_2(n) = 1 + 4n.$$

Nous avons
$$\begin{aligned}
a_{\phi_1(n)} &= 2n\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = 2n\sin(n\pi) = 0\\
a_{\phi_2(n)} &= (1+4n)\sin\left(\frac{(1+4n)\pi}{2}\right) = (1+4n)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = (1+4n).
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{\phi_1(n)} &= 0.\\
\lim_{n\to\infty} a_{\phi_2(n)} &= +\infty.
\end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé deux suites extraites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite. Ce qui implique que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 11

Montrer que la suite

$$b_n = \frac{(-1)^n n^3 + 3n^2 + 5}{2 - 5n^3}.$$

diverge.

Solution : Notons que si on choisit

$$\phi_1(n) = 2n \quad \text{et} \quad \phi_2(n) = 2n + 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
b_{\phi_1(n)} &= \frac{(-1)^{2n}(2n)^3 + 3(2n)^2 + 5}{2 - 5(2n)^3} = \frac{(2n)^3 + 3(2n)^2 + 5}{2 - 5(2n)^3}. \\
b_{\phi_2(n)} &= \frac{(-1)^{2n+1}(2n+1)^3 + 3(2n+1)^2 + 5}{2 - 5(2n+1)^3} = \frac{-(2n+1)^3 + 3(2n+1)^2 + 5}{2 - 5(2n+1)^3}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_{\phi_1(n)} &= -\frac{1}{5}. \\
\lim_{n\to\infty} b_{\phi_2(n)} &= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé deux suites extraites de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite. Ce qui implique que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 11

Montrer que la suite

$$c_n = (-1)^n \frac{n}{1+n} \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right).$$

diverge.

Solution : Notons que si on choisit

$$\phi_1(n) = 7n \quad \text{et} \quad \phi_2(n) = 14n + 1.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} c_{\phi_1(n)} &= (-1)^{7n} \frac{7n}{1+7n} \cos(n\pi) = (-1)^{7n} \frac{7n}{1+7n} (-1)^n = \frac{(-1)^{8n} 7n}{1+7n} = \frac{7n}{1+7n} \\ c_{\phi_2(n)} &= (-1)^{14n+1} \frac{14n+1}{2+14n} \cos\left(\frac{\pi}{7} + 2n\pi\right) = -\frac{14n+1}{2+14n} \cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_{\phi_1(n)} &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} c_{\phi_2(n)} &= -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé deux suites extraites de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite. Ce qui implique que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 12

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution : Soit

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell' \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \ell''.$$

Notons que :

- $(u_{6n})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n})_n$ et de $(u_{3n})_n$. **Puisque toute suite extraite d'une suite convergente de limite L, converge vers L**, on conclut :

  $$\lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \ell''$$

  Ceci implique que $\ell = \ell''$.

- $(u_{6n+3})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_n$ et de $(u_{3n})_n$. **Puisque toute suite extraite d'une suite convergente de limite L, converge vers L**, on conclut :

  $$\lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell' \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = \ell''$$

  Ceci implique que $\ell' = \ell''$.

Exercice 12

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell = \ell'' = \ell' = \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1}.$$

Pour finir rappellons le résultat suivant

Théorème

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell.$$

D'après le théorème précédent on conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \text{ avec } l \in [0,+\infty] \,.$$

1. Montrer que, si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que, si $l > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Peut-on conclure si $l = 1$?
4. Appliquer ces résultats aux exemples suivants :
    1. $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$
    2. $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$
    3. $w_n = \dfrac{a^n}{n^p}$ avec $a \in \,]1,+\infty[$ et $p \in \mathbb{N}$.
    4. $z_n = \sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$**, alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$**.**

Preuve : Supposons $\ell < 1$. Possons $\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$. Alors $\epsilon > 0$, et d'après la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2}.$$

L'inegalité triangulaire nous permet donc, pour tout $n \geq N$, d'écrire

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - l \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \frac{1-\ell}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1-\ell}{2} + l = \frac{1+\ell}{2} < 1.$$

Maintenant, pour tout $n \geq N$ nous avons

$$u_n = \frac{u_N}{u_N} \cdot \frac{u_{N+1}}{u_{N+1}} \cdot \; \cdots \; \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} \cdot u_n = u_N \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdot \; \cdots \; \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

Égalité qui nous permet, pour tout $n > N$, de conclure

$$|u_n| = |u_N| \left| \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = |u_N| \prod_{k=N}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq |u_N| \prod_{k=N}^{n-1} \frac{1+\ell}{2} = |u_N| \left(\frac{1+\ell}{2} \right)^{n-N}.$$

Exercice 13

C'est-à-dire

$$-|u_N|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} \leq u_n \leq |u_N|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N}$$

Or $\frac{1+\ell}{2} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} = 0.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$0 = -\lim_{n\to+\infty}|u_N|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty}|u_N|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} = 0$$

D'où on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 13

Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$**, alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$**.**

Preuve : Supposons $\ell > 1$. Possons $\epsilon = \frac{\ell-1}{2}$. Alors $\epsilon > 0$, et d'après la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \frac{l-1}{2}.$$

Ce qui est équivalent à

$$\frac{1-\ell}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leq \frac{\ell-1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{1+\ell}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3\ell-1}{2}.$$

Maintenant, pour tout $n \geq N$ nous avons

$$u_n = \frac{u_N}{u_N} \cdot \frac{u_{N+1}}{u_{N+1}} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} \cdot u_n = u_N \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

Égalité qui nous permet, pour tout $n > N$, de conclure

$$|u_n| = |u_N| \left|\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = |u_N| \prod_{k=N}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geq |u_N| \prod_{k=N}^{n-1} \frac{1+\ell}{2} = |u_N| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N}.$$

Exercice 13

C'est-à-dire

$$u_n \geq |u_N| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N}$$

Or $\frac{1+\ell}{2} > 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N} = +\infty.$$

Le **Théorème d'Encadrement** nous permet donc d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} |u_N| \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} = +\infty$$

D'où on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 13

Peut-on conclure si $\ell = 1$? Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure : par exemple,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

  et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n = \frac{1}{n+1}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

  et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 13

(1) **Calculer la limite de** $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$**, avec** $a \in \mathbb{R}_+^*$:Nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Le point 1 de la question 13 nous permet donc de conclure : $u_n \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(2) **Calculer la limite de** $v_n = \frac{n^n}{n!}$: Nous avons

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{n+1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e > 1.$$

Le point 2 de la question 13 nous permet donc de conclure : $v_n \to +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 13

$\color{blue}{(3)}$ **Calculer la limite de $w_n = \frac{a^n}{n^p}$ avec $a \in]1, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}$:** Nous avons

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} \times \frac{n^p}{a^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

Maintenant, le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(x) = x^p \quad \text{et} \quad u_n = \frac{n}{n+1},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Ainsi

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a > 1.$$

Le point 2 de la question 13 nous permet donc de conclure : w_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 13

(4) **Calculer la limite de** $z_n = \sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$: Nous avons

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{1/(n+1)}}{a^{1/n}} = a^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = a^{\frac{-1}{n(n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Il faut donc trouver une autre méthode pour calculer la limite de z_n lorsque n tend vers $+\infty$. Notons que

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right)$$

Le **Theorème de Composition à gauche par une fonction**, avec

$$f(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\ln(a)}{n},$$

nous permet donc de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right) = 1.$$

Exercice 14

On définit les deux suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Solution : Nous allons montrer que les deux suites sont adjacentes. Ce qui aura comme conséquence qu'elles ont la même limite. Nous allons donc vérifier

- $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante.
- $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Nous avons

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{(n+2)(n+1)} + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2n+3 - 2\sqrt{(n+2)(n+1)}}{\sqrt{n+1}} > 0.
\end{aligned}$$

Exercice 14

En effet

$$\frac{2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)}}{\sqrt{n+1}} > 0 \iff 2n+3-2\sqrt{(n+2)(n+1)} > 0$$
$$\iff 2n+3 > 2\sqrt{(n+2)(n+1)}$$
$$\iff 4n^2+12n+9 > 4n^2+12n+8.$$

Donc, $(u_n)_n$ est croissante. De même

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1-2(n+1)+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{-1-2n+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} < 0. \end{aligned}$$

Exercice 14

En effet

$$\begin{aligned} \frac{-1-2n+2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} < 0 \quad & \iff \quad -1-2n+2\sqrt{n(n+1)} < 0 \\ & \iff \quad 2\sqrt{n(n+1)} < 1+2n \\ & \iff \quad 4n^2+4n < 4n^2+4n+1. \end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_n$ est décroissante. Finalement

$$\begin{aligned} v_n - u_n \quad & = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ & = \quad 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite.

Exercice 15

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
En déduire que u_n converge.

Solution : Nous allons vérifier que :

- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $u_{2n} - u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned} u_{2n+2} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+2} + (-1)^{2n} \frac{1}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0. \end{aligned}$$

Donc $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 15

De même

$$\begin{aligned} u_{2n+3} - u_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= (-1)^{2n+2} \frac{1}{2n+3} + (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0. \end{aligned}$$

Donc $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Finalement

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= (-1)^{2n} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Exercice 15

Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites **adjacentes**. Elles convergent donc vers la même limite. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergent.

Exercice 16

On considère les deux suites réelles définies par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 12 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Calculer w_n en fonction de n et montrer que la suite (w_n) converge. Quelle est sa limite ?

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, puis montrer que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

(3) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent et qu'elles ont la même limite.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Calculer t_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (t_n) converge vers une limite que l'on précisera.

(5) Déduire la limite commune de (u_n) et (v_n).

Exercice 16

(1) On commence par noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{v_n - u_n}{12} \\ &= \frac{1}{12} w_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} \cdot w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot w_{n-1} = \cdots = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \cdot w_0 = \frac{11}{12^{n+1}}.$$

(la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de **raison** $q = \frac{1}{12}$.) D'où on conclut

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} q^n w_0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{11}{12^n} = 0.$$

Exercice 16

(2) Nous avons

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n + 2(w_n + u_n)}{3} \\ &= \frac{3u_n + 2w_n}{3} = u_n + \frac{2w_n}{3} \\ &= u_n + \frac{22}{3 \cdot 12^n}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_{n+1} - u_n = \frac{22}{3 \cdot 12^n} > 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Le même raissonement nous permet de démontrer que

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{11}{4 \cdot 12^n} < 0.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Finalement, étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$v_n - u_n = w_n = \frac{11}{12^n} \geq 0,$$

on conclut que $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

(3) D'après les deux question précédentes, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $v_n - u_n = w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Du **Théorème sur les suites adjacents**, on en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 16

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $t_n = 3u_n + 8v_n$. Dans la question 2 nous avons montré

$$\begin{cases} u_n = u_{n+1} - \frac{22}{3 \cdot 12^n} \\ v_n = v_{n+1} + \frac{11}{4 \cdot 12^n}. \end{cases}$$

Ce qui nous permet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'écrire

$$t_n = 3u_n + 8v_n = 3u_{n+1} - \frac{22}{12^n} + 8v_{n+1} + \frac{22}{12^n} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = t_{n+1}.$$

Ainsi, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constanteet

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 8 \cdot 12 = 99.$$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 99.

Exercice 16

(5) Étant donné que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, leur limite commune est ℓ. D'après la question précédente, nous avons

$$99 = \lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 3\ell + 8\ell = 11\ell \quad \Longrightarrow \qquad 99 = 11\ell.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 9.$$

Exercice 17

Soient (u_n) une suite convergente, l sa limite, a un réel, si $a < l$ montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n > a$$

Solution : Puisque $a < l$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < l - a \quad \Longrightarrow \quad a < l - \epsilon.$$

Maintenant, d'après la définition de la limite

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N, \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

Ceci entraine que

$$l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon.$$

Mais $a < l - \epsilon$, donc

$$a < l - \epsilon \leq u_n.$$

Exercice 18

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

(1) $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ avec $u_0 = 0$, puis $u_0 = 2$. On se placera sur $I = [0; +\infty[$.

Solution : Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$$

Alors :

- f est une fonction croissante ($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$) sur I.
- L'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f.
- Le point fixe de f sur $[0, +\infty[$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En effet, sur $[0, +\infty[$ nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = x \quad & \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \\ & \underbrace{\Longleftrightarrow}_{x \geq 0} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque f est croissante, le **Théorème sur les suites récurrentes** nous permet de conclure que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est une suite monotone.}$$

Étudions à présent la convergence de cette suite.

Exercice 18

Si $u_0 = 0$: Alors

$$f(0) - 0 = \sqrt{0+1} - 0 = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \text{ est croissant.}$$

De plus, puisque f est croissante et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on conclut que

$$u_0 = 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = f(u_0) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_2 = f(u_1) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad u_n = f(u_{n-1}) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi

$$\forall n, \; u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** et **majorée**, donc convergent. Le **Théorème des suites récurrentes** nous dit donc que sa limite est un **point fixe** de f. Puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe de f dans $[0, +\infty[$, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 18

Si $u_0 = 2$: Alors

$$f(2) - 2 = \sqrt{2+1} - 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \text{ est décroissant.}$$

De plus, puisque f est croissante et $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on conclut que

$$u_0 = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = f(u_0) > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_2 = f(u_1) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad u_n = f(u_{n-1}) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi

$$\forall n,\ u_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** et **minorée**, donc convergent. Le **Théorème des suites récurrentes** nous dit donc que sa limite est un **point fixe** de f. Puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe de f dans $[0, +\infty[$, on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 18

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

(2) $u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$ avec $u_0 = 1$, puis $u_0 = 2$. On se placera sur $I =]0, +\infty[$.

Solution : Soit

$$\begin{array}{rcl} f :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + 1 \end{array}$$

Alors :

- f est une fonction décroissante ($f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) sur I.
- L'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f.

Le **Théorème de suites récurrents** nous permet donc de conclure que

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

sont **monotones** de **monotonie contraire**. Étudions à présent la convergence de ces deux suites. Pour cela notons que pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}) \\ u_{2n+3} &= f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(u_{2n+1}). \end{aligned}$$

Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc récurrentes associées à la fonction $f \circ f$.

Exercice 18

Maintenant

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{f(x)} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} + 1 = \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{2x+1}{x+1}.$$

La fonction $f \circ f$ est donc continue et croissante sur $[0, +\infty[$:

$$f \text{ décroissante } \implies f \circ f \text{ croissante.}$$

De plus, pour tout $x \in [0, +\infty[$, nous avons

$$(f \circ f)(x) = x \iff \frac{2x+1}{x+1} = x \iff x^2 - x - 1 = 0$$

$$\underbrace{\iff}_{x \geq 0} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le unique **point fixe** de $f \circ f$ dans $[0, +\infty[$.

Exercice 18

Si $u_0 = 1$. Alors nous avons :

$$u_2 - u_0 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{2n} \quad \text{est croissante}$$
$$\Longrightarrow \quad u_{2n+1} \quad \text{est décroissante.}$$

Finalement, puisque $f \circ f$ est croissante et $(f \circ f)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on conclut que

$$\begin{aligned} u_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 = u_1 \quad &\Longrightarrow \quad u_2 = (f \circ f)(u_0) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < (f \circ f)(u_1) = u_3 \\ &\Longrightarrow \quad u_4 = (f \circ f)(u_2) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < (f \circ f)(u_3) = u_5 \\ &\quad \vdots \\ &\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{2n} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq u_{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante** et **majorée**, donc convergent. De même , $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** et **minorée**, donc convergent.

Exercice 18

Le **Théorème sur les suites récurrentes** nous dit donc que la valeur de leurs limites est un **point fixe** de $f \circ f$. Puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe de $f \circ f$ dans $]0, +\infty[$, on conclut :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_{2n} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 18

Si $u_0 = 2$. Alors nous avons :

$$u_2 - u_0 = \left(\frac{2}{3} + 1\right) - 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{2n} \text{ est décroissante}$$
$$\Longrightarrow \quad u_{2n+1} \text{ croissante.}$$

Finalement, puisque $f \circ f$ est croissante et $(f \circ f)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on conclut que

$$u_1 = \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 = u_0 \quad \Longrightarrow \quad u_3 = (f \circ f)(u_1) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < (f \circ f)(u_0) = u_2$$
$$\Longrightarrow \quad u_5 = (f \circ f)(u_3) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < (f \circ f)(u_2) = u_4$$
$$\vdots$$
$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq u_{2n}$$

Ainsi, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** et **minorée**, donc convergent. De même, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante** et **majorée**, donc convergent.

Exercice 18

Le **Théorème sur les suites récurrentes** nous dit donc que la valeur de leurs limites est un **point fixe** de $f \circ f$. Puisque $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe de $f \circ f$ dans $]0, +\infty[$, on conclut :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_{2n} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 19

On considère la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3 - \sqrt{\frac{u_n}{2}}$.
On pose $f(x) = 3 - \sqrt{\frac{x}{2}}$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 3]$.

(2) Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de f dans cet intervalle.

(3) Montrer que la suite $(u_{2n})_n$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_n$ décroissante.

(4) On admet que $f \circ f$ possède les mêmes points fixes que f dans l'intervalle $[0; 3]$. Montrer que les deux suites extraites convergent vers la même limite et conclure.

Exercice 19

Solution : Soit

$$\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3-\sqrt{\frac{x}{2}} \end{array}$$

Alors :

- f est une fonction décroissante $\left(f'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}}} < 0\right)$ sur I.
- Puisque f est décroissante, pour tout $x \in [0,3]$, nous avons

  $$0 < 3-\sqrt{\frac{3}{2}} = f(3) \leq f(x) \leq f(0) = 3 \quad \Longrightarrow \quad f\left([0,3]\right) \subset [0,3].$$

  C'est-à-dire $[0,3]$ es stable par f.
- Sur l'intervalle $[0,3]$, nous avons :

  $$3-\sqrt{\frac{x}{2}} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - \frac{13}{2}x + 9 = 0 \quad \underbrace{\Longleftrightarrow}_{x\in[0,3]} \quad x = 2.$$

  Ainsi 2 est l'unique point fixe de f dans $[0,3]$.

Exercice 19

Maintenant, $u_0 = 0 \in [0,3]$, puis comme $[0,3]$ est stable par f, on conclut que

$$\begin{aligned} u_0 \in [0,3] \quad &\Longrightarrow \quad u_1 = f(u_0) \in f([0,3]) \subset [0,3] \Longrightarrow u_2 = f(u_1) \in f([0,3]) \subset [0,3] \\ &\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,3] \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. De plus, puisque f est décroissant, le **Théorème sur les suites récurrents** nous dit que

$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

sont **monotones** de **monotonie contraire**. Pour déterminer leur sens de variation, on compute

$$\begin{aligned} u_2 - u_0 = \left(3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) - 0 > 0 \quad &\Longrightarrow \quad (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ est croissante} \\ &\Longrightarrow \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Ainsi

- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** et **bornée**, donc convergent. Disons vers ℓ.
- $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** et **bornée**, donc convergent. Disons vers ℓ'.

Exercice 19

Nous allons montrer que $\ell = \ell'$, ce qui aura comme conséquence que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Notons que pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}) \\ u_{2n+3} &= f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(u_{2n+1}). \end{aligned}$$

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$. Le **Théorème de suites récurrents** nous dit donc que leur limites ℓ et ℓ' sont des **points fixes** de $f \circ f$. Maintenant, le unique point fixe de $f \circ f$ dans $[0, 3]$ est 2 (admis, donné dans l'enoncé). Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 2.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2.$$

Étant donné que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 2, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Exercice 20

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f :]0;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & 1+\dfrac{2}{x} \end{array}$$

et la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Montrez que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur u_n ? Quel est le sens de variation de f sur $[1,3]$? Soient v_n et w_n les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
2. Montrez que $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes. Déterminez leur limite respective.
4. Finalement, quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 20

Solution : Soit

$$\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\dfrac{2}{x} \end{array}$$

Alors :

- f est une fonction décroissante ($f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$) sur I.
- Puisque f est décroissante, pour tout $x \in [1,3]$, nous avons

  $$1+\frac{2}{3} = f(3) \leq f(x) \leq f(1) = 3 \quad \Longrightarrow \quad f\left([1,3]\right) \subset [1,3]\,.$$

  C'est-à-dire $[1,3]$ es stable par f.

Maintenant, $u_0 = 1 \in [1,3]$, puis comme $[1,3]$ est stable par f, on conclut que

$$\begin{aligned} 1 \leq u_0 \leq 3 \quad &\Longrightarrow \quad 1 \leq f(u_0) = u_1 \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq f(u_1) = u_2 \leq 3 \\ &\Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite bornée. De plus, puisque f est décroissant, le Théorème de suites récurrents nous dit que

$$(v_n) = (u_{2n}) \quad \text{et} \quad (w_n) = (u_{2n+1})$$

sont monotones de monotonie contraire. Pour déterminer leur sens de variation, on compute

$$u_2 - u_0 = \frac{5}{3} - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (v_n) \ \text{ est croissante} \quad \Longrightarrow \quad (w_n) \ \text{ est décroissante.}$$

Exercice 20

Ainsi

- (v_n) est une suite croissante et bornée, donc convergent. Disons vers L.
- (w_n) est une suite décroissante et bornée, donc convergent. Disons vers L'.

Nous allons montrer que $L = L'$, ce qui aura comme conséquence que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L.$$

Notons que pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{2n+2} &= f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n}) = (f \circ f)(v_n) \\ w_{n+1} = u_{2n+3} &= f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(u_{2n+1}) = (f \circ f)(w_n). \end{aligned}$$

Les suites (v_n) et (w_n) sont donc récurrentes associées à la fonction continue $f \circ f$. Le Théorème de suites récurrents nous dit donc que leur limites L et L' sont des points fixes de $f \circ f$. Maintenant

$$(f \circ f)(x) = \frac{2}{f(x)} + 1 = \frac{2}{\frac{2}{x} + 1} + 1 = \frac{2x}{x+2} + 1 = \frac{3x+2}{x+2}$$

et vous pouvez montrer facilement que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par $f \circ f$. Ainsi, sur l'intervalle $[1, 3]$, nous avons :

$$(f \circ f)(x) = x \iff \frac{3x+2}{x+2} = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

L'unique point fixe de $f \circ f$ dans $[1, 3]$ est donc 2.

Exercice 20

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= 2 \\ \lim_{n\to+\infty} w_n &= 2. \end{aligned}$$

Étant donné que les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ convergent vers 2, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Exercice 21

Étudier les suites (u_n) à termes réels vérifiant

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (u_n^2 - 3u_n + 4), \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On pourra étudier les variation de la fonction f définissant cette suite, déterminer ses points fixes, étudier le signe de $f(x) - x$ puis distinguer plusieurs cas selon la valeur de u_0.

Exercice 21

Solution : Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$$

Alors :

- f est une fonction croissante, en effet $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$, qui est un polynôme de discriminant negatif sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2 > 0$.
- Le point fixe de f sont 0, 1 et 2. En effet

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4) = x \iff x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) = 0$$
$$\iff x = 0,\ 1 \text{ ou } 2.$$

- Notons que $f(x) - x = x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$ satisfait les inégalités suivantes :

$$f(x) - x \leq 0, \quad \text{si} \quad x \in]-\infty, 0] \cup [1, 2]$$
$$\text{et} \quad f(x) - x \geq 0, \quad \text{si} \quad x \in [0, 1] \cup [2, +\infty].$$

Exercice 21

- Puisque f est croissante et les points fixes de f sont $0, 1$ et 2, on conclut que

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\infty, 0],\ -\infty < f(x) < f(0) = 0 &\implies f(]-\infty, 0]) \subset\ ]-\infty, 0].\\
\forall x \in [0, 1],\ 0 = f(0) < f(x) < f(1) = 1 &\implies f([0, 1]) \subset [0, 1].\\
\forall x \in [1, 2],\ 1 = f(1) < f(x) < f(2) = 2 &\implies f([1, 2]) \subset [1, 2].\\
\forall x \in [2, +\infty[,\ 2 = f(2) < f(x) &\implies f([2, \infty[) \subset [2, +\infty[.
\end{aligned}$$

Les distinctions qui suivent sont justifiées par le fait que les ensembles

$$]-\infty, 0[\ ;\ \{0\}\ ;\ ]0, 1]\ ;\ [1, 2[\ ;\ \{2\}\ ;\ ]2, +\infty[$$

sont tous stables par f.

- **Cas où** $u_0 \in\ ]-\infty, 0[$: l'intervalle $]-\infty, 0[$ est stable par f et

$$f(x) \leq x, \quad \text{pour tout} \quad x \in\ ]-\infty, 0[.$$

En particulier $f(u_0) - u_0 \leq 0$. Ainsi, (u_n) est décroissante d'après le **Théorème sur les suites récurrents**. De plus, (u_n) possède une limite ℓ d'après le **Théorème de la limite monotone**. Comme f ne possède pas de point fixe dans $]-\infty, 0[$, il en découle que : $\ell = -\infty$. **Conclusion :**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty.$$

Exercice 21

- **Cas où** $u_0 = 0$: Cette fois, (u_n) est constante de valeur 0, donc
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

- **Cas où** $u_0 \in]0,1]$: l'intervalle $]0,1]$ est stable par f et :
$$f(x) \geq x, \quad \text{pour tout} \quad x \in]0,1].$$
En particulier $f(u_0) - u_0 \geq 0$. Donc (u_n) est à la fois bornée entre 0 et 1 et croissante d'après le **Théorème sure les suites récurrents**. Par conséquent, (u_n) possède une limite $\ell \in]0,1]$ d'après le **Théorème de la limite monotone**. Puisque f est continue, le **Théorème sur les suites récurrents** nous dit que ℓ est un pointe fixe de f dans $]0,1]$. Ainsi, $\ell = 1$. **Conclusion :**
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

exercice 21

- **Cas où** $u_0 \in [1,2[$: l'intervalle $[1,2[$ est stable par f et

$$f(x) \leq x, \quad \text{pour tout} \quad x \in [1,2[.$$

  En particulier $f(u_0) - u_0 \leq 0$. Donc (u_n) est à la fois bornée entre 1 et 2 et décroissante d'après le **Théorème sur les suites récurrents**. Par conséquent, (u_n) possède une limite $\ell \in [1,2[$ d'après le **Théorème de la limite monotone**. Puisque f est continue, le Théorème des suites récurrents nous dit donc que l est un pointe fixe de f dans $[1,2[$. Ainsi, $\ell = 1$. **Conclusion :**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

- **Cas où** $u_0 = 2$: Cette fois, (u_n) est constante de valeur 2, donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

- **Cas où** $u_0 \in]2, +\infty[$: l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f et

$$f(x) \geq x, \quad \text{pour tout} \quad x \in]2, +\infty[.$$

En particulier $f(u_0) - u_0 \geq 0$. Ainsi, (u_n) est croissante d'après le **Théorème sur les suites récurrents**. De plus, (u_n) possède une limite l d'après le **Théorème de la limite monotone**. Comme f ne possède pas de point fixe dans $]2, +\infty[$, il en découle que : $\ell = +\infty$.
Conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Suites Complexes

L'étude des suites complexes se ramène à l'étude des suites réels :

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe* $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{C})$. *Alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si*

$$(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent, et on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i\left(\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n)\right).$$

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

Exercice 22

Étudier les suites suivantes :

(1) $u_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1}$: Nous avons

$$\left|\frac{n^2 i^n}{n^3+1}\right| = \left|\frac{n^2}{n^3+1}\right| \cdot |i^n| = \left|\frac{n^2}{n^3+1}\right| \cdot |i|^n = \frac{n^2}{n^3+1}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2 i^n}{n^3+1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = 0$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 i^n}{n^3+1} = 0.$$

Exercice 22

(2) $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n i$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(u_n) = \frac{1}{n} \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = 0. \\
\mathrm{Im}(u_n) = (-1)^n \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Im}(u_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad (\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ ne converge pas.}
\end{aligned}$$

Puisque la partie imaginaire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on conclut que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'existe pas, c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 22

(3) $\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1} &= \frac{n(n-3i)}{n^2+9} - \frac{in}{n+1} \\
&= \frac{n^2-3in}{n^2+9} - \frac{in}{n+1} \\
&= \frac{n^2}{n^2+9} - i\left(\frac{3n}{n^2+9} + \frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+9} - i\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n^2+9} + \frac{n}{n+1}\right) = 1 - i.$$

Exercice 22

(4) $\frac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n+4i-3)(n-i)}$: Nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n+4i-3)(n-i)} &= \frac{(n^2-n-3)i+1}{2n^2-2ni+4ni+4-3n+3i} \\
&= \frac{(n^2-n-3)i+1}{2n^2-3n+4+(2n+3)i} \\
&= \frac{((n^2-n-3)i+1)(2n^2-3n+4-(2n+3)i)}{(2n^2-3n+4)^2+(2n+3)^2} \\
&= \frac{2n^3-12n-5+i(2n^4-5n^3+n^2+3n-15)}{(2n^2-3n+4)^2+(2n+3)^2}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n+4i-3)(n-i)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-12n-5}{(2n^2-3n+4)^2+(2n+3)^2} + \\
&\quad i\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4-5n^3+n^2+3n-15}{(2n^2-3n+4)^2+(2n+3)^2}\right) \\
&= 0 + \frac{i}{2} = \frac{i}{2}.
\end{aligned}
$$

Exercice 23

Étudier la suite définie par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z}_n).$$

Solution : Nous avons

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z}_n) = \frac{1}{3}(z_n + (z_n - \overline{z}_n)).$$

Si on sépare z_n en partie réel et partie imaginaire, on obtient

$$z_n = x_n + iy_n.$$

Ainsi

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{1}{3}((x_n + iy_n) + 2iy_n) = \frac{1}{3}(x_n + 3iy_n) = \frac{1}{3}x_n + iy_n.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n \quad &\Longrightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 x_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 x_{n-2} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} x_0\\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0.\\
y_{n+1} = y_n \quad &\Longrightarrow \quad y_{n+1} = y_n = y_{n-1} = y_{n-2} = \cdots = y_0\\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = y_0.
\end{aligned}$$

Exercice 23

Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} z_n &= \lim_{n\to+\infty} x_n + i\left(\lim_{n\to+\infty} y_n\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x_0 + i\left(\lim_{n\to+\infty} y_0\right)\\ &= 0 + iy_0 \;=\; iy_0.\end{aligned}$$

Exercice 24

Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}. \end{cases}$$

On introduit la suite complexe de terme général

$$z_n = x_n + iy_n.$$

(1) Établir une relation de récurrence entre z_n et z_{n+1}.

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} &= x_{n+1} + iy_{n+1} \\ &= \frac{x_n - y_n}{2} + i\frac{x_n + y_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x_n + iy_n) + \frac{1}{2}(-y_n + ix_n) \\ &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}(i^2 y_n + ix_n) \\ &= \frac{1}{2}z_n + \frac{i}{2}z_n = \frac{1}{2}(1+i)z_n. \end{aligned}$$

Exercice 24

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n &= \frac{1}{4}(1+i)^2 z_{n-1} \\
&= \frac{1}{8}(1+i)^3 z_{n-2} \\
&\;\vdots \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(1+i)^{n+1} z_0.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \frac{1}{2^n}(1+i)^n z_0.$$

Exercice 24

(2) En déduire que les deux suites réelles sont convergentes et donner leur limite.

Solution : Commençons par noter que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} |z_n| &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{2^n}(1+i)^n\right| \cdot |z_0| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} |1+i|^n \cdot |z_0| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot |z_0| \\
&= |z_0| \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n + iy_n = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n + i \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 15 - Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(v_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite u).

1. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors on a aussi
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$
Étudier la réciproque.
2. Que peut-on dire si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$?

Exercice 25 - Théorème de Cesàro

On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Montrons $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. Soit $\epsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers l il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_0, \implies |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $n > N_0$. Nous avons

$$|v_n - l| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - l\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{n}{n}\cdot l\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right|.$$

L'inégalité triangulaire $(|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$ nous permets d'écrire

$$|v_n - l| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k - l)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - l| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n}|u_k - l|.$$

Ainsi pour tout $n > N_0$:

$$\begin{aligned} |v_n - l| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n}\frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{\epsilon(n - N_0 + 1)}{2n}. \end{aligned}$$

Exercice 25 - Théorème de Cesàro

Puis comme $\frac{n-N_0+1}{n} < 1$, on peut écrire

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{\epsilon(n - N_0 + 1)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| + \frac{\epsilon}{2}. \qquad (1)$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l| = \left(\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k - l|\right)\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Donc, d'après la définition de la limite

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1-1}|u_k - l| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On pose $N = \max(N_0, N_1)$. En combinant ce dernier résultat à l'inégalité (1), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \implies |v_n - l| \leq 2\cdot\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On a donc démontré que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n > N \implies |v_n - l| \leq \epsilon.$$

Cela permet d'affirmer que (v_n) converge vers l.

Exercice 25 - Théorème de Cesàro

La réciproque du Théorème de Cesàro est fausse. En effet, considérons la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^{n+1}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}.$$

Par le Théorème d'Encadrement, on en déduit que la suite (v_n) converge vers 0. En revanche, la suite u_n est une suite divergente. La réciproque du Théorème de Cesàro est donc fausse.

Exercice 25 - Théorème de Cesàro

Que peut-on dire si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$? Montrons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_0 \implies u_n > 4A.$$

Par conséquent, si $n > N_0$ nous avons

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_{N_0-1}}{n} + \frac{u_{N_0} + \cdots + u_n}{n} \geq \frac{u_1 + \cdots + u_{N_0-1}}{n} + 4A\left(\frac{n - N_0 + 1}{n}\right).$$

Maintenant, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-N_0+1}{n} = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N_1 \implies \left|\frac{n - N_0 + 1}{n} - 1\right| < \frac{1}{2} \implies \frac{n - N_0 + 1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1+\cdots+u_{N_0-1}}{n} = 0$, on conclut

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \implies \left|\frac{u_1 + \cdots + u_{N_0-1}}{n}\right| < A \implies \frac{u_1 + \cdots + u_{N_0-1}}{n} > -A.$$

Ainsi, en posant $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies v_n > \frac{u_1 + \cdots + u_{N_0-1}}{n} + 4A\left(\frac{n - N_0 + 1}{n}\right) > -A + 4\cdot\frac{A}{2} = A.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 26 - constante d'Euler

Soit :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

2. En déduire que :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

3. En déduire la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par :

$$u_n = H_n - \ln(n)$$

   est décroissante et positive.
5. Conclure (La limite de (u_n) souvent notée γ est appelée la constante d'Euler, du nom du mathématicien Suisse Leonhard Euler, 1707-1783. Cette limite vaut environ 0.5772156649... mais on ne sait toujours pas si ce réel est rationnel ou irrationnel. La question est toujours ouverte !)

Exercice 26 - constante d'Euler

Solution :

(1) Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ définie par

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

La fonction f est une fonction continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} (n+1-n)f(n+1) &= \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \leq (n+1-n)f(n) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 21 - constante d'Euler

(2) On a pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ et pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

Pour $n \geq 2$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(n),$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(3) D'après le théorème de gendarme, $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 26 - constante d'Euler

(4) On a $u_{n+1} = H_{n+1} - \ln(n+1) = H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$. Donc,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &\underbrace{\leq}_{\text{d'après 1.}} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $u_n \geq 0$. En effet, $u_1 = H_1 = 1 > 0$. On suppose que l'hypothèse est vraie jusqu'au rang (n) et on va la démontrer au rang $(n+1)$:

$$u_{n+1} = H_{n+1} - \ln(n+1) = H_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \underbrace{>}_{\text{car } H_n \geq \ln(n+1)} 0.$$

D'où le résultat.
(5) La suite $(u_n)_{n>0}$ est décroissante et minorée par 0, donc $(u_n)_n$ converge vers $\gamma \geq 0$.

Exercice 27

Soit $z_n = a^n$ est une suite complexe de raison $a \in \mathbb{C}$.

1. Étudier cette suite dans le cas $|a| < 1$, puis dans le cas $|a| > 1$. **Solution :**
   - Si $|a| < 1$: Alors
   $$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = \lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} |a|^n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$
   - Si $|a| > 1$: Alors
   $$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = \lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} |a|^n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad (z_n) \text{ diverge .}$$
2. Dans le cas $|a| = 1$, on notera $a = e^{i\theta}$. Que se passe t-il si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$?
   Solution : Si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
   $$\begin{aligned} \frac{\theta}{2\pi} = k \quad \Longrightarrow \quad \theta = 2k\pi \quad & \Longrightarrow \quad e^{i\theta} = e^{2ki\pi} = 1 \\ & \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \left(e^{i\theta}\right)^n = 1^n = 1. \\ & \Longrightarrow \quad (z_n) \text{ est une suite constante de valeur } 1 \\ & \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} z_n = 1. \end{aligned}$$

Exercice 27

(3) Supposons $|a| = 1$. Montrer que si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, la suite est périodique et donc divergente. Dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, on montre que la suite est également divergente.

Solution :

Si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$, avec p et q premiers entre eux, et $q \neq 0$, tel que

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{2p\pi}{q} \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \left(e^{\frac{2ip\pi}{q}}\right)^n = e^{\frac{2ipn\pi}{q}}$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+q} = e^{\frac{2ip(n+q)\pi}{q}} = e^{\frac{2ipn\pi}{q}} e^{2ip\pi} = z_n.$$

Ainsi, (z_n) est une suite périodique et donc divergente. Nous pouvons aussi noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = kq, \ k \in \mathbb{Z} \\ e^{\frac{2ip\pi}{q}} & \text{si } n = 1 + kq, \ k \in \mathbb{Z} \\ e^{\frac{4ip\pi}{q}} & \text{si } n = 2 + kq, \ k \in \mathbb{Z} \\ \vdots & \\ e^{\frac{2ip(q-1)\pi}{q}} & \text{si } n = (q-1) + kq, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercice 27

Si $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$z_n \neq z_m.$$

En effet, s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $z_n = z_m$, alors

$$\begin{aligned} e^{i\theta n} = e^{i\theta m} \quad \Longrightarrow \quad \theta n = \theta m + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad & \Longrightarrow \quad \theta = \frac{2k\pi}{n-m} \\ & \Longrightarrow \quad \frac{\theta}{2\pi} = \frac{k}{n-m} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Par contraposée, on conclut donc que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, nous avons $z_n \neq z_m$. Ceci a comme conséquence le résultat suivant :

Proposition

Supposons $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors l'ensemble

$$\{e^{in\theta} : n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans le cercle unité $\mathbb{U}$.

Maintenant, d'après la proposition précédente pour tout élément $u \in \mathbb{U}$, il existe une suite extraite (u_n) de (z_n), tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$. Ainsi, (z_n) admet des suites extraites avec des limites différents. Donc (z_n) diverge.