Groupes et morphismes de groupes

1 Lois de composition internes

Exercice 1
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. La soustraction est un LCI dans $\mathbb{Z}$.
2. 0 est l'élément neutre de la soustraction dans $\mathbb{Z}$.
3. La soustraction dans $\mathbb{Z}$ est associative.
4. 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{N}$.
5. L'addition est associative dans $\mathbb{N}$.
6. L'addition est une LCI dans l'ensemble des nombres entiers pairs.
7. L'addition est une LCI dans l'ensemble des nombres entiers impairs.

Exercice 2
Préciser pour chacune des LCI $\star$ définies ci-dessous si elle est associative, commutative, possède un élément neutre.

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \star y = \ln(\exp x + \exp y)$

Exercice 3
Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on pose :

$$x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $([0, 1], \star)$ est un magma commutatif et associatif.
2. Montrer que $([0, 1], \star)$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments inversibles de $([0, 1], \star)$?

Exercice 4
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $\star$ et d'un élément neutre. Un élément de E est dit idempotent si $x \star x = x$.

1. Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x \star y$ est idempotent.
2. Montrer que si x est idempotent et inversible alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 5
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. Pour tout a de E, on définit les applications g_a et d_a de E dans E : $\forall x \in E,\ d_a(x) = x \star a$ et $g_a(x) = a \star x$.

1. Montrer que s'il existe a dans E tel que g_a et d_a soient surjectives, alors E possède un élément neutre pour la loi $\star$.
2. Montrer que si pour tout a de E, les applications g_a et d_a sont surjectives, alors tout élément de E possède un inverse pour la loi $\star$.

2 Groupes, sous-Groupes

Exercice 6
Sur $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit l'opération $\star$ par :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.
Exercice 7
Soit les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:

$$f_1(x) = x \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f_3(x) = -x \quad ; \quad ; f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montrer que $G = \{f_1; f_2; f_3; f_4\}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe.*
Exercice 8
Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (respectivement de $(\mathbb{R}^*, \times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ?
Exercice 9
Les ensembles suivants, munis de l'addition des réels sont-ils des groupes ?Justifier.

1. $\{a\sqrt{2}; a \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a\sqrt{2} + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{a\sqrt{2} + b\sqrt{3}; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\}$

Exercice 10
Les ensembles suivants, munis de la multiplication des réelles sont-ils des groupes ? Justifier.

1. $\{1, -1, \frac{1}{2}, 2\}$

2. $\{a2^n; a = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}^*\}$

Exercice 11
Soit S un sous-groupe d'un groupe $(G, \star)$ et $a \in G$. Montrer que $a^{-1} \star S \star a = \{c = a^{-1} \star b \star a; b \in S\}$ est un sous-groupe de G, dit conjugué de S.

Exercice 12
Soit $(G, \star)$ un groupe et $A \subset G$, non vide. On pose :

$$N(A) = \{x \in G;\ x^{-1} \star A \star x = A\}$$

Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 13
Soit E un ensemble, $(G, \star)$ un groupe et f une bijection de E vers G. Pour $(x, y) \in E^2$, on pose $x \sharp y = f^{-1}(f(x) \star f(y))$. Montrer que la loi de composition interne ainsi définie sur E munit E d'une structure de groupe.

Exercice 14
Soit $(E, \star)$ et $(F, \cdot)$ deux groupes. On munit l'ensemble produit $E \times F$ de la loi de composition $\otimes$ définie par :

$$\forall (x, y),\ (x', y') \in E \times F,\ (x, y) \otimes (x', y') = (x \star x', y \cdot y')$$

1. Montrer que $(E \times F, \otimes)$ est un groupe.
2. Soit E' un sous-groupe de E et F' un sous-groupe de F. Montrer que $E' \times F'$ est un sous-groupe de $E \times F$, muni de la loi $\otimes$.

Exercice 15
Soit $G =]-1, 1[$ muni de la loi $\star$ définie par : $x \star y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 16
Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que ($H \cup K$ est un sous-groupe de G) $\iff$ ($H \subset K$ ou $K \subset H$).

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv;\ u, v \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   En particulier, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ pour un certain $d \in \mathbb{Z}$. Montrer alors que $d = a \wedge b$.

Exercice 18
Soit H un groupe abélien. Un élément $x \in H$ est dit d'ordre fini lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la somme $x + \cdots + x$ (n fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini est un sous-groupe abélien de H.

2.1 Morphismes de groupes

Exercice 19
On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

1. Montrer que l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto & \mid z \mid \end{array}$$

   est un morphisme de groupes. On note U le noyau du morphisme ci-dessus.

2. Construire un isomorphisme de groupes de $\mathbb{C}^*$ vers le groupe produit $\mathbb{R}_+^* \times U$.

Exercice 20

1. Soit $(G, \star)$ un groupe, pour tout $h \in G$, on définie l'application

$$\phi_h \quad : \quad \begin{array}{ccc} G & \to G & \\ g & \mapsto & h \star g \star h^{-1} \end{array}$$

   (a) Montrer que, pour tout $h \in G$, l'application ϕ_h est un automorphisme de groupe ($\phi_h \in Aut(G)$).

   (b) Déterminer son inverse ϕ_h^{-1}.

   (c) Montrer que $\phi_h \circ \phi_k = \phi_{h \star k}$, pour tout $h, k \in G$.

   (d) Considerons l'application :

$$\phi \quad : \quad \begin{array}{ccc} (G, \star) & \to & Aut(G, \circ) \\ h & \mapsto & \phi_h \end{array}$$

   Montrer que ϕ est un morphisme de groupe.

   (e) On suppose que $(G, \cdot)$ est commutatif. Déterminer Le noyau de ϕ.

Exercice 21
Soit G un groupe. Montrer que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupes $G \to G$, si et seulement si, G est abélien.

Exercice 22
L'application $f_1 : (\mathbb{C}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times), f_1(z) = |z|$, est-elle un morphisme de groupes ? Si c'est le cas, déterminer son noyau et son image. Idem pour :

$$f_2 : (\mathbb{Z}^2, +) \to (\mathbb{Z}, +), (a, b) \mapsto a - b$$

$$f_3 : (\mathbb{Z}^3, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \times), (a, b, c) \mapsto 2^a \times 3^b \times 5^c$$

Exercice 23
Soit a un élément d'un groupe $(G, \star)$.

1. Montrer que l'application $f : k \mapsto a^k$ définit un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(G, \star)$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.

Exercice 24
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : (\mathbb{R}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ définie par $f(x) = x^n$.

1. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans lui-même.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.