

## ENSEMBLES

**Exercice 1.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1. Montrer que  $(A^c)^c = A$
2. Soit  $A \subset B$ . Montrer que  $B^c \subset A^c$ .
3. Montrer les « **Lois de Morgan** » :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

**Exercice 2.** Soit  $A, B, C, D$  des parties d'un ensemble  $E$ .

Montrer que :

1.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .
2.  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ .
3.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .
4.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

**Exercice 3.** Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

1. Montrer :
  - a)  $A \subset B \iff A \cup B = B$
  - b)  $A \subset B \iff A^c \cup B = E$
2. En déduire :
  - a)  $A \subset B \iff A \cap B = A$
  - b)  $A \subset B \iff A \cap B^c = \emptyset$

**Exercice 4.** Soient  $A, B, C$  trois ensembles. Montrer que

1.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
2.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
3.  $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$ .
4.  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .

**Exercice 5.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Quelle relation y a-t-il entre :

1.  $P(E \cup F)$  et  $P(E) \cup P(F)$  ?
2.  $P(E \cap F)$  et  $P(E) \cap P(F)$  ?
3.  $P(E \times F)$  et  $P(E) \times P(F)$  ?

**Exercice 6.** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  et  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ .

1. Écrire le produit cartésien  $A \times B$ .
2. Quel est le nombre de parties de  $A \times B$  ?

**Exercice 7.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Tous les sous-ensembles de  $E \times F$  sont-ils de la forme  $A \times B$  avec  $A \subset E$  et  $B \subset F$  ?

**Exercice 8.** Soient  $A, B, C, D$  quatre ensembles.

1. Montrer que  $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$ .
2. Montrer que  $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ .

**Exercice 9.** Soient deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$ . Soit  $\Delta$  la différence symétrique dans  $P(E)$  définie par  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Montrer que  $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
2. Montrer que  $A\Delta B = B\Delta A$ .
3. Montrer que  $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ .
4. Que valent  $A\Delta\emptyset$  et  $A\Delta A$  et  $A\Delta B$  quand  $A \subset B$ ?

---

### A faire chez soi

**Exercice 10.** 1. Montrer que  $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \implies B \subset C$ .

2. On suppose que  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ . Que peut-on dire de  $B$  et  $C$ ?

**Exercice 11.** Soit  $A, B, C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

1. Montrer que  $A \cap B = A \cup B \iff A = B$ .
2. Montrer que  $A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c$ .
3. Montrer que  $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus C)$ . Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

**Exercice 12.** Simplifier les expressions suivantes où  $A, B$  et  $C$  sont des parties d'un ensemble  $E$  :

1.  $A \cap (A^c \cup B)$
2.  $A \cup (A^c \cap B)$
3.  $A \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c \cup C)$
4.  $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

---

### Pour aller plus loin

**Exercice 13.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  deux familles de parties d'un ensemble  $E$ . On suppose que pour tout indice  $i$  de  $I$ , on a  $E = A_i \cup B_i$ . Montrer que

$$E = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

**Exercice 14.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$