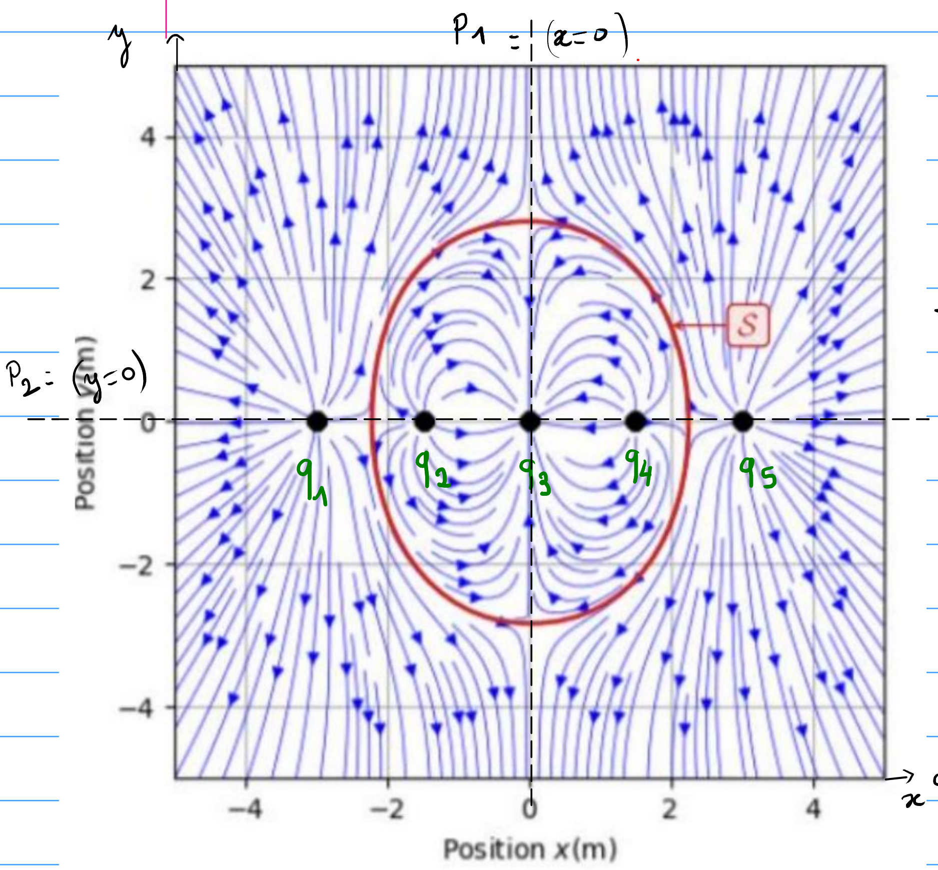
2 | Champ électrostatique et théorème de Gauss

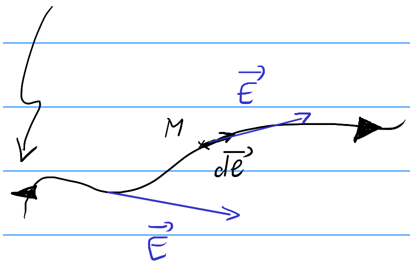
Exercice 6 – Lecture d'une carte de champ *

On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées de 1 à 5 de gauche à droite.

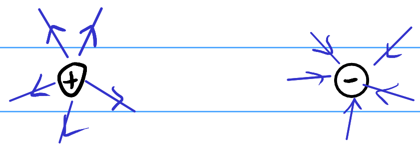
1/ Donner le signe de chacune des charges.



ligne de champ électrostatique $\vec{E}$:



$\boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$ en tout point M de la ligne de champ



donc $q_1, q_2, q_4, q_5 > 0$

$q_3 < 0$

2/ Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.

plan de symétrie : P_1 plan de symétrie (cf. lignes de champ)

P_2 " " symétrie (« lui-m̂ » en « lui-m̂ »)

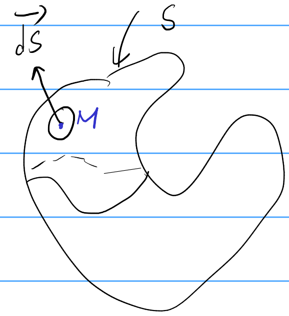
$\Rightarrow$ $q_1 = q_5$ et $q_2 = q_4$

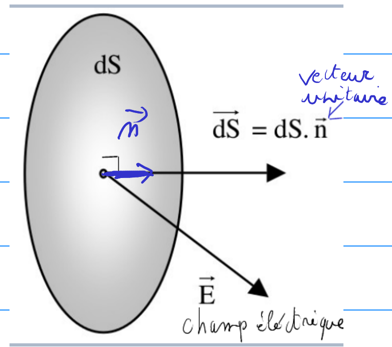
3/ On admet que le champ est nul en tout point de la surface S : comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?

sur S, $\vec{E} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ pas de lignes de champs et les lignes de champ ne se croisent pas : « lignes de champ se repoussent »

4/ En déduire q_3 en fonction des autres charges.

Théorème de Gauss :





- $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS}$

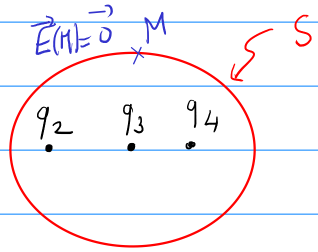
flux total $\quad \Phi = \iint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}$

- choix d'une surface de Gauss fermée contenant une partie de la distribution de charge

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

avec q_{int} : toutes les charges à l'intérieur de la surface de Gauss

- ici :



- surface de Gauss S fermée
- $\Phi(\vec{E}) = \oiint_{M \in S} \underbrace{\vec{E}(M)}_{= \vec{0} \text{ sur } S \text{ (cf 3/)}} \cdot \vec{dS} = 0$

$\Rightarrow$ Théorème de Gauss :

$$\Phi(\vec{E}) = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow q_{int} = 0$$

donc la somme de toutes les charges à l'intérieur doit être nulle

$$q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

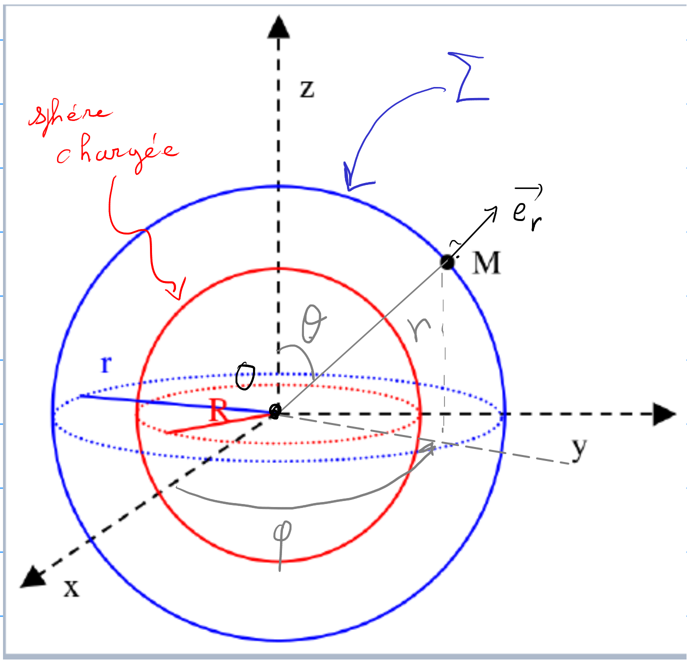
$q_2 + q_3 + q_4 = 0$ et $q_1 = q_5$ $\quad \underline{q_2 = q_4}$

$\Rightarrow \quad 2q_2 + q_3 = 0 \Rightarrow \boxed{q_3 = -2q_2}$

$q_1 \quad q_2 \quad -2q_2 \quad q_2 \quad q_1$

Exercice 1 – Symétrie sphérique

Soit une sphère, de rayon R, chargée uniformément. En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'une sphère de rayon r.



- Système de coordonnées : $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

$\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$

- invariances : sphère uniformément chargée donc la distribution de charges reste la même si on varie en θ et φ

$\vec{E}(r)$

- symétries :

+	+
−	−

P plan de symétrie

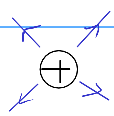
tout plan passant par M et O (centre de la sphère) est un plan de symétrie

↳ ∞ de ces plans de symétrie et la direction commune est $\vec{e_r}$

$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}}$

remarque : charge ponctuelle ($R = 0$)

↳ champ $\vec{E}$ radial : $E\,\vec{e_r}$



$$\bullet\ \Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_{\Sigma} E(r)\,\vec{e}_r \cdot \vec{dS} = \oiint_{\Sigma} E(r)\,\overbrace{dS_r}^{dS_r}$$

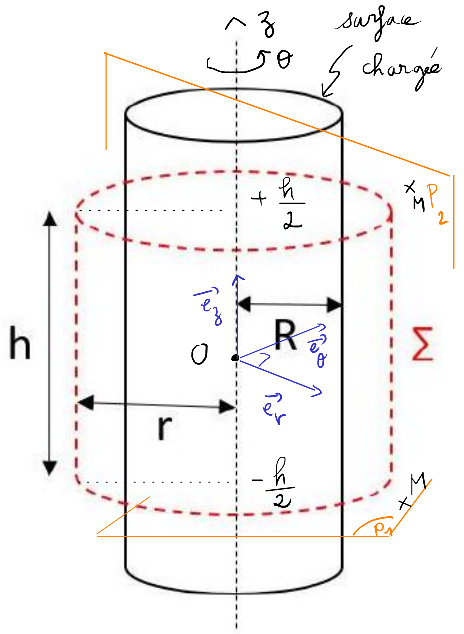
$$\vec{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix} \qquad \vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = dS_r \\ \bullet\ r\,dr\,\sin\theta\, d\varphi = dS_\theta \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta = dS_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{\theta=0\ \varphi=0}^{\pi\ \ 2\pi} \underbrace{E(r)\ r^2}_{\text{constant à } r \text{ donné}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\underline{\Phi(\vec{E})} = E(r)\,r^2 \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \underline{4\pi r^2\, E(r)}$$

Exercice 2 – Symétrie cylindrique

Soit un cylindre, de rayon R et de hauteur supposée infinie, chargé uniformément. En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h.



⓪ coordonnées cylindriques : $\{O; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)\}$ $\quad \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

① invariances : ∞ et homogène

↳ translation selon Oz : distribution de charges inchangée

↳ rotation autour de Oz : " " " "

$\underline{\vec{E}(r)}$

M r cylindre

② symétries : • plan $P_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie

• plan $P_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ = plan de sym.

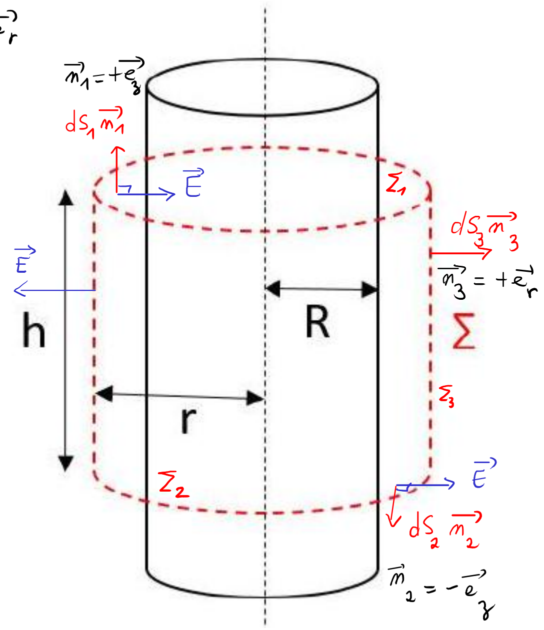
$\vec{E} \in P_1$ et $P_2 \Rightarrow$ direction commune $= \vec{e}_r$

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$$

Σ : cylindre de hauteur h, d'axe Oz, de rayon r

définition du flux

③ Flux de $\vec{E}$: $\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS}}$, $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$



$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{n_1}}_{=0}\,dS_1 + \iint_{\Sigma_2} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{n_2}}_{=0}\,dS_2 + \iint_{\Sigma_3} \vec{E}\cdot\vec{n_3}\,dS_3$$

$\vec{e_z} \perp \vec{e_r}$ $\quad$ $\vec{e_z} \perp \vec{e_r}$ $\quad$ surface latérale

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_3} E(r)\,\vec{e_r}\cdot dS_r\,\vec{e_r} = \iint_{\Sigma_3} E(r)\,dS_r$$

surface latérale

$$\vec{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \qquad \vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ r\,d\theta\,dz = dS_r \\ \bullet\ dr\,dz = dS_\theta \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta = dS_z \end{vmatrix}$$

$\vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$

$$\underline{\Phi(\vec{E})} = \int_{z=-h/2}^{h/2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{r\,E(r)}\,d\theta\,dz = r\,E(r)\underbrace{\int_{-h/2\,(0)}^{h/2\,(h)} dz}\ \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = \underline{2\pi r h\ E(r)}$$

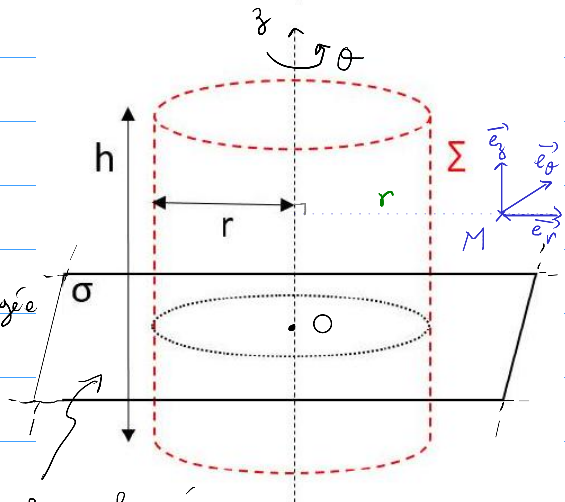
à r donné

$h = [z]_{-h/2}^{h/2}$

Exercice 3 – Symétrie plane

Soit un plan infini chargé uniformément de densité σ. En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h.

⓪ coordonnées cylindriques : $\{O, (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})\}$



surface chargée ∞

① invariances : $\vec{E}(r, \theta, z)$

plan ∞ chargé uniformément

↳ rotation selon Oz : distribution de charges reste inchangée

↳ translation selon $\vec{e_r}$: " " " " "

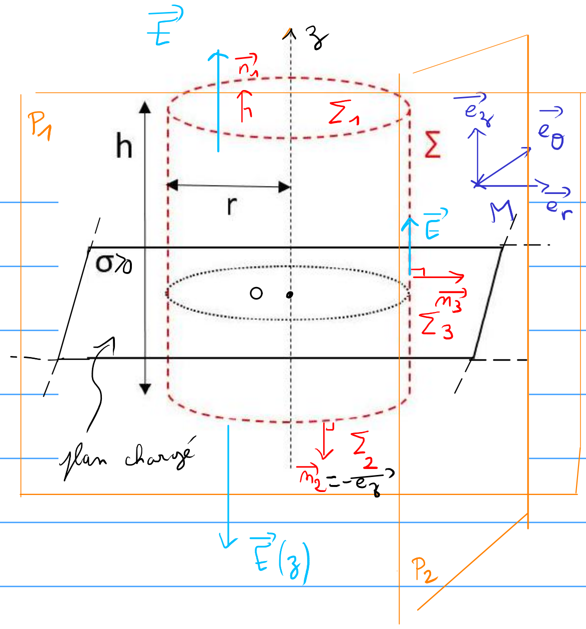
$\vec{E}$ invariant selon θ et selon r

$$\underline{\vec{E}(z)}$$

② Symétries : plan ∞

↳ plan $P_1 = (M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ plan de symétrie

↳ plan $P_2 = (M, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ " " "



$\vec{E} \in P_1$ et $P_2 \Rightarrow \vec{E} = E(z)\,\vec{e_z}$

de plus $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

③ flux de $\vec{E}$: $\Phi(\vec{E}) = \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} E(z)\, dS_z$

$\vec{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix}$ $\vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ r\,d\theta\,dz = dS_r \\ \bullet\ dr\,dz = dS_\theta \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta = dS_z \end{vmatrix}$

$\Phi_2 = \Phi_1$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{\Sigma_1} \underbrace{E(z)\,\vec{e_z}\cdot dS_1\,\vec{e_z}}_{\Phi_1} + \iint_{\Sigma_2 \, (z<0)} \underbrace{E(z<0)\,\vec{e_z}}_{-E(z>0)\,\vec{e_z}} \cdot dS_2\,(-\vec{e_z}) + \iint_{\Sigma_3} \underbrace{E(z)\,\vec{e_z}\cdot dS_3\,\vec{e_r}}_{=0}$$

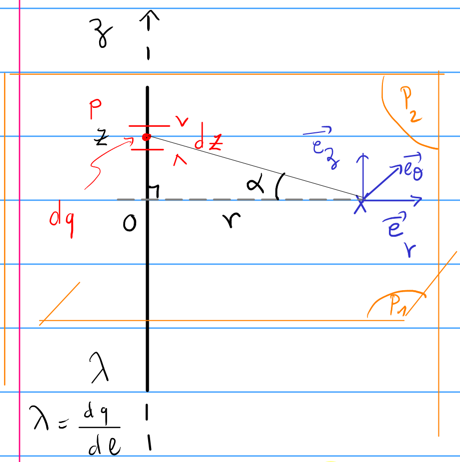
$$\Phi(\vec{E}) = 2 \int_{r=0}^{r}\int_{0}^{2\pi} \underbrace{E(z)}_{\text{constant}}\, r\,dr\,d\theta = 2E(z) \underbrace{\int_0^r r\,dr}_{\left[\frac{r^2}{2}\right] = \frac{r^2}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2E(z)\pi r^2$$

lignes de champ :

https://youtube.com/playlist?list=PLjo5Br6lsjzu10ycLSMwEkYmqW7h9JO05

Exercice 4 – Distribution linéique de charges

1/ Calculer par intégration le champ électrostatique $\vec{E}$ créé en un point M quelconque de l'espace par une distribution linéique de charges de <u>densité λ uniforme</u> et répartie le long de l'axe des z.



- M point quelconque de l'espace
- dz : élément de longueur centré en P avec $dq = \lambda\, dz$ charges
- loi de Coulomb :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\lambda\, dz\ \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0\, PM^3}$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = r\,\vec{e}_r - z\,\vec{e}_z \ , \quad PM^2 = r^2 + z^2$$

Pour des raisons de symétrie ($P_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $P_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plans de symétrie),

$$\vec{E} = E_r\,\vec{e}_r$$

$$dE_r = \frac{\lambda\, dz\ r}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

donc le champ total créé par le fil vaut :

changement de variable : $\frac{z}{r} = \tan\alpha$

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\ r\ dz}{4\pi\varepsilon_0 \left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

constant

$$\frac{dz}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{dz}{r} = \frac{1}{r}\, d(\tan\alpha)$$

$$\frac{r\, dz}{\left(r^2\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)\right)^{3/2}} = \frac{r\ dz}{r^3\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{r}\frac{d(\tan\alpha)}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)^{3/2}} = \frac{1}{r}\frac{\left(1 + \tan^2\alpha\right) d\alpha}{\left(1 + \tan^2\alpha\right)^{3/2}}$$

$$\frac{d(\tan\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha\left(-\sin\alpha\right)}{-\left(\cos^2\alpha\right)} = 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{r\, dz}{\left(r^2\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)\right)^{3/2}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}\right)^{1/2} = \frac{\cos\alpha}{r}$$

$$\boxed{E_r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\ r\ dz}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\ d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\Big[\sin\alpha\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{1-(-1)=2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r$$

2/ Retrouver ce résultat en calculant $\vec{E}$ en appliquant le théorème de Gauss.

⓪ Définition : $\vec{E}$ défini et continu partout sauf sur le fil (où il y a les charges)

① système de coordonnées : $\{O ; (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\}$

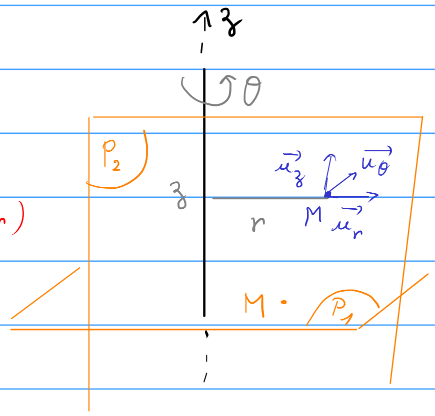
② Invariances :

fil ∞ uniforme :

invariance par translation selon z

" " rotation autour Oz

$$\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}) = \vec{E}(r)$$



③ Symétries :

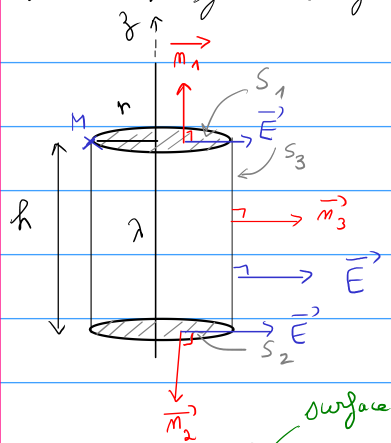
$P_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ plan de symétrie

$P_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ " " "

$\vec{E} \in P_1$ et $P_2 \Rightarrow \vec{E}$ selon la direction commune : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

④ Théorème de Gauss : $$\Phi(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ⓐ Σ surface de Gauss contient une partie de la distribution de charge, est de dimensions finies et fermée ; et respecte la géométrie du problème.



- Σ : cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r

$\Sigma = \{S_1 + S_2 + S_3\}$

- pour chaque surface, on a des vecteurs unitaires $\vec{n}$ orthogonaux orientés vers l'extérieur,

$\vec{n}_1 = +\vec{u}_z$ $\vec{n}_2 = -\vec{u}_z$ $\vec{n}_3 = +\vec{u}_r$

surface fermée

ⓑ $$\Phi(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} E(r)\,\vec{u}_r\cdot dS\,\vec{n} = \iint_{S_1} E(r)\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{n}_1}_{=0}\,dS + \iint_{S_2} E(r)\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{n}_2}_{=0}\,dS + \iint_{S_3} E(r)\,\vec{u}_r\cdot\vec{n}_3\,dS$$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{S_3} E(r)\overbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r}^{=1}\,dS_r = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} E(r)\,r\,d\theta\,dz = E(r)\,r\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\int_{z=0}^{h} dz}_{2\pi h}$$

(Ex. 3)

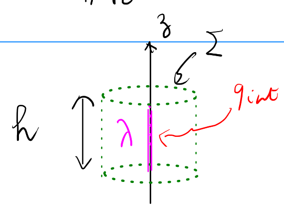
à r donné

λ : $C.m^{-1}$

h : m

$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h\,E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ⓒ $$q_{int} = \int_{V(\Sigma)} dq = \int_{z=0}^{h} \lambda\,dz = \lambda h$$



$$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r \cancel{h} E(r) = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \vec{u}_r}$$

Rq : • $\vec{E}$ indépendant de h

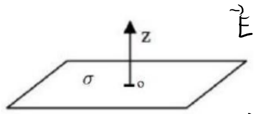
• m̂ résultat

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{cst}$$

Exercice 5 – Plan infini uniformément chargé

Soit un plan infini uniformément chargé en surface, de densité surfacique de charge σ séparant l'espace en deux demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$.

$\vec{E}(z>0)$



$\vec{E}(z<0)$

Appliquer le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ engendré par cette distribution en tout point M de l'espace.

⓪ Définition de $\vec{E}$: densité surfacique de charge $\Rightarrow \vec{E}$ défini et continu partout sauf à la traversée de la surface chargée (en $z=0$).

$$\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \qquad (\sigma > 0)$$

discontinuité

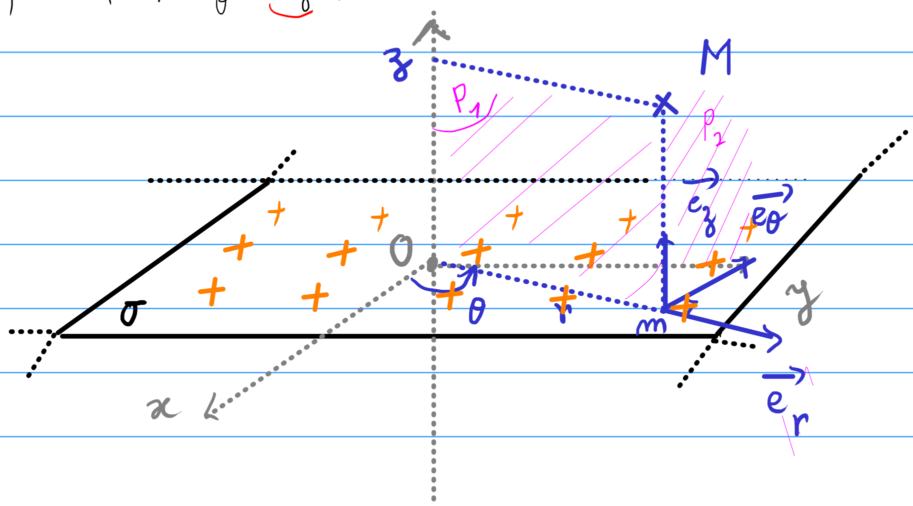
① Système de coordonnées : coord. cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ $\quad \vec{E}(r, \theta, z)$

② Invariances : distribut. unif. et plan ∞

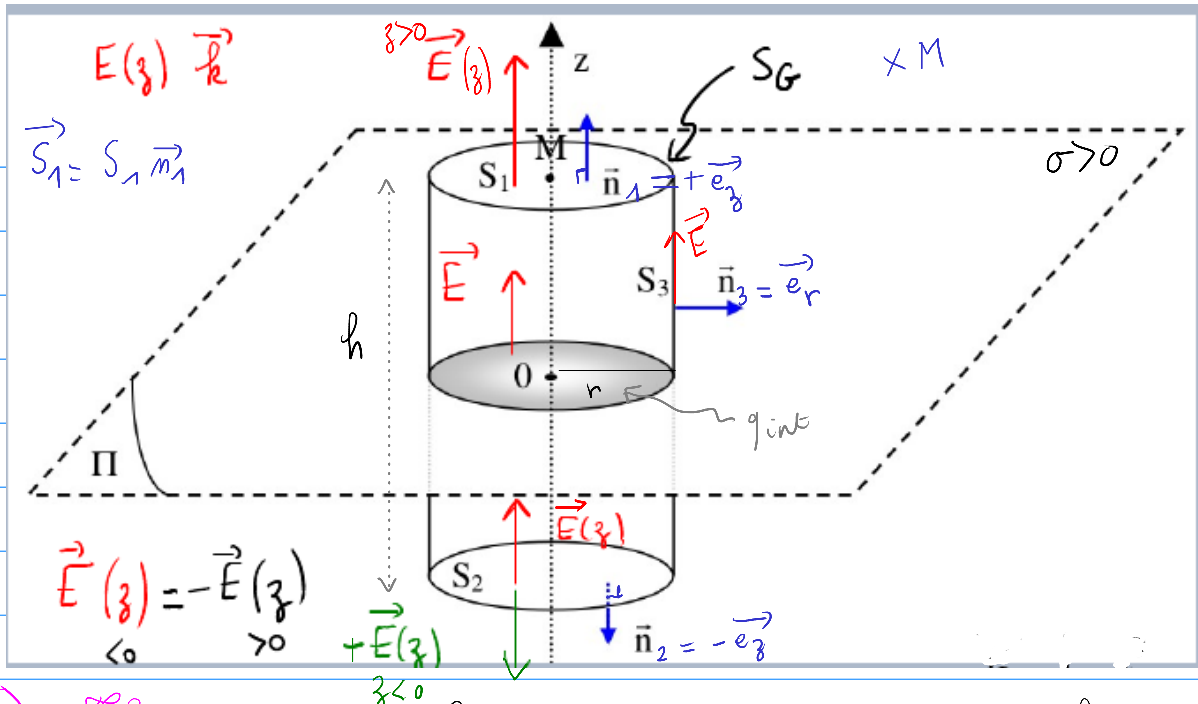
$\begin{cases} \text{invariance par rotation autour de } Oz \\ \quad \text{"} \qquad \text{"} \quad \text{translation selon } \vec{e}_r \end{cases} \Longrightarrow \vec{E}(z)$

③ Symétries :

$$\left.\begin{array}{l} \text{plan } (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) = P_1 = \text{plan de symétrie} \\ \text{plan } (M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) = P_2 = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right\} \vec{E} \in P_1 \text{ et } P_2 \qquad \vec{E} = E\,\vec{e}_z$$



$$\boxed{\vec{E} = E(z)\,\vec{e}_z}$$



④ Théorème de Gauss : S_G : cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r avec $S_G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{avec } \underline{\vec{E} = E(z)\,\vec{e_z}} \text{ ici}$$

plan $(z=0, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ = plan de symétrie pour $\vec{E}$ donc $\vec{E}(z>0) = -\vec{E}(z<0)$

$$* \ \Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E}(z) \cdot \vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_1} E(z)\vec{e_z} \cdot dS_1 \vec{n_1}}_{\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} E(z)\vec{e_z} \cdot dS_2 \vec{n_2}}_{\Phi_2} + \iint_{S_3} E(z)\underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{n_3}}_{=0} dS_3$$

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} E(z>0)\, \vec{e_z} \cdot dS_1 \vec{e_z}$$

or $E(z<0) = -E(z>0)$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} E(z<0)\, \vec{e_z} \cdot dS_2 (-\vec{e_z}) = \Phi_1$$

$$\Phi(\vec{E}) = 2\,\Phi_1(\vec{E})$$

constant à z fixé

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} E(z>0)\, dS_z = \int_{r=0}^{r}\int_{\theta=0}^{2\pi} E(z>0)\, r\, dr\, d\theta = E(z>0) \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r 2\pi$$

$$\vec{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{vmatrix} \qquad dS_z = r\, dr\, d\theta$$

$\vec{E}$ ⊙ $\odot\, \vec{e_z}$

$$\Phi(\vec{E}) = 2\overbrace{\left(E(z>0)\,\pi r^2\right)}^{\Phi_1} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

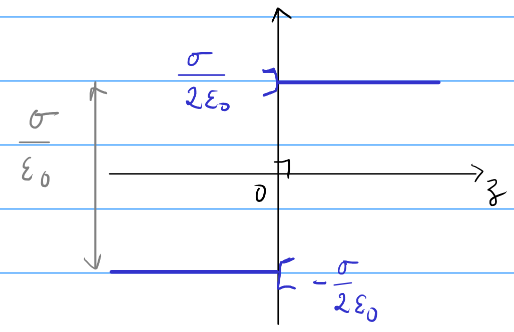
- $\underline{q_{int}}$:

$$q_{int} = \iint_{S} dq = \iint_{S} \sigma\, dS = \sigma S = \sigma \pi r^2$$

sur le plan chargé

σ constant

donc
$$\vec{E} = \begin{cases} E(z>0)\,\vec{e_z} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z} \\ E(z<0)\,\vec{e_z} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z} \end{cases}$$



discontinuité :

$$E(z=0^+) - E(z=0^-) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Exercice 7 – Sphère uniformément chargée en volume

Une sphère de centre O et de rayon R porte une densité volumique de charge uniforme ρ.

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, contenue dans la sphère ?

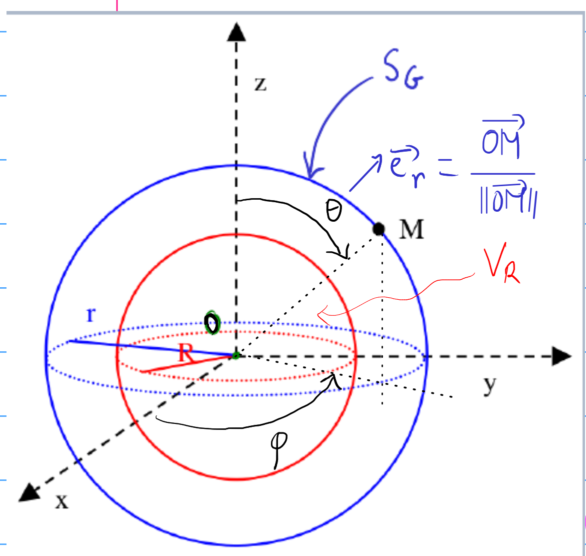
2/ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en considérant le point M :

a) à l'interieur de la sphère : $r < R$

b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter.

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.



1/ Charge totale Q : $\rho \hat{=} \dfrac{dq}{dV}$

$$Q = \iiint_{V_R} dq = \iiint_{V_R} \rho\, dV = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}_{V_R} \rho$$

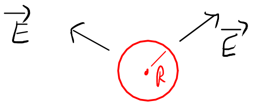
uniforme $\rho = \text{cst}$

2/ ⓪ $\vec{E}$ défini et continu partout (dist. vol.)

① coord. sphériques : $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

② $\vec{E}(r,\theta,\varphi)$ mais invariance par rotation selon θ et φ

↳ $\vec{E}(r)$



③ Symétrie : tout plan P passant par M et centre O $\left[(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \text{ et } (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) \right]$
= plan de symétrie

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r \quad \text{radial}$$

④ Théorème de Gauss :

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

S_G : sphère de centre O et de rayon r

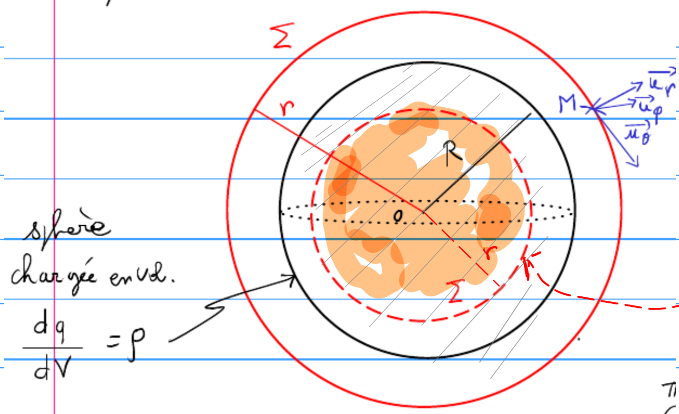
a) $\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} E(r)\, dS_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{E(r)\, r^2}_{\text{à } r \text{ fixé}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = r^2 E(r) \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr = dl_r \\ r\,d\theta = dl_\theta \\ r \sin\theta \, d\varphi = dl_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$$

b) q_{int} ? q_{int} = charges contenues dans la surface de Gauss (en rouge)

$\Sigma = S_G$



• $r \geq R$: $q_{int} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

• $r \leq R$: q_{int} : portion de la charge totale

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{car}$$

$$q_{int} = \iiint \rho \, dV = \rho \, V_\Sigma = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

volume délimité par la surface Σ

$$\hookrightarrow q_{int} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q$$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$[E] = \left[\frac{q}{r^2}\,\frac{1}{\varepsilon_0}\right] \qquad \left[\frac{q}{V}\right][r] = \left[\frac{q}{r^2}\right]$$

$$E(r \leq R) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\cancel{4\pi} r^2}\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}} \rho\right) = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r \geq R) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\cancel{4\pi} r^2}\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3 \rho\right) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{r^2}\right)$$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ?

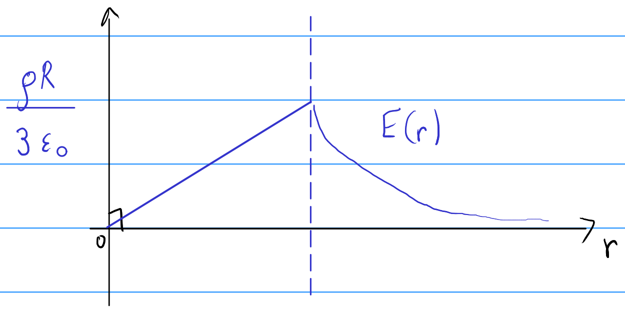
pour $r = R$

$$E(r = R^+) = E(r = R^-) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$$

le champ est continu à la traversée

ok O définition et continuité de $\vec{E}$

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.



Exercice 8 – Sphère uniformément chargée en surface

Une sphère de centre O et de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ.

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, contenue dans la sphère ?

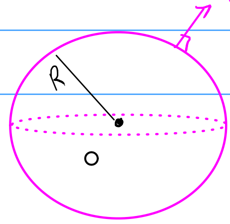
(cf Exercice 7.)

$$1/ \quad Q = \underset{\text{sphère chargée}}{\iint} dq = \iint \sigma\, dS_r = \sigma\, 4\pi R^2$$

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix}$$

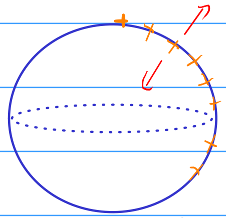
$$Q = \sigma \iint_{r=R} dS_r = \sigma R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

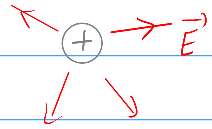
$\vec{dS} = dS_r\, e_r$



2/ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en considérant le point M :
a) à l'interieur de la sphère : $r < R$
b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

0) Définition et continuité : distribution surfacique $\Rightarrow \vec{E}$ défini et continu sur tout l'espace sauf à la traversée de la surface.





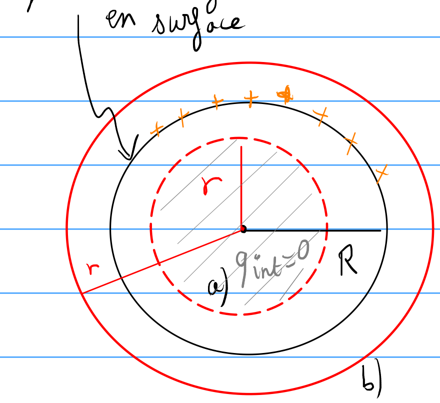
1) 2) idem $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$

3) Théorème de Gauss :

S_G : sphère de rayon r en rouge

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

a) à l'interieur de la sphère : $r < R$ ----
b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$ ——



$\underline{q_{int}}$: a) $r < R$; $q_{int} = 0$

b) $r > R$: $q_{int} = Q = 4\pi R^2 \sigma$

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E(r) = \frac{q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \text{donc}$$

a) $E(r<R) = 0$

b) $E(r>R) = \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R^2}{r^2}\right)$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter.

NON ; $E(r=R^-) = 0 \neq E(r=R^+) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

discontinuité à la traversée de la surface $= \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

4/