Département de Mathématiques
PréING1-Analyse
2021 - 2022

TD 5 - Analyse asymptotique

Partie I - Comparaison des suites :

Exercice 1. -
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$ et $(u_n - v_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
4. $\dfrac{3^n}{n} = O(2^n)$

Exercice 2. -
Donner des équivalents simples des suites ci-dessous :

1. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. $v_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$
3. $w_n = \sqrt{1+\sqrt{n}}$
4. $x_n = \sqrt{n^3+2n^2} - \sqrt{n^3+n^2}$
5. $y_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$

Exercice 3. -
Déterminer les limites suivantes en utilisant des équivalents.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+n+1}\right)$

Exercice 4. Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1. $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$.
2. $\ln(\cos\frac{1}{n})(\ln\sin\frac{1}{n})$.
3. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.
4. $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \quad \sim \quad n!$.

Exercice 6. -
Soit s_n une suite de réels de limite 0 et telle que : $s_n + s_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

1. On suppose que (s_n) est décroissante, montrer que $s_n \sim \dfrac{1}{2n}$.
2. En considérant la suite $\left(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq1}$, prouver que ce résultat est en défaut si (s_n) n'est pas décroissante.

Partie II - Comparaison de fonctions :

Exercice 7. -
À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 8. -
Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 9. -
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x + 3x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^4)}{x(\tan(x) - sin(x))}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x^2} - 1}{\ln(\cos(x))}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2}$
6. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{3e^{x^2} - 5x^4}{\ln(7x^2) + 2x}$

Exercice 10. -
Calculer les limites de

1. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0.
2. $\dfrac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$ en 0.
3. $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.
4. $(\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 11. -
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \left((x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\dfrac{(1 - \cos x)\sin x}{x^3}\right)$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$
7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 12. Calculer la limite et l'équivalent des fonctions suivantes :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \quad \text{en } +\infty$$

$$\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2} \quad \text{en } +\infty$$

$$\frac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)} \quad \text{en } 0$$

$$\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\tan(x + \frac{\pi}{4}) \quad \text{en } \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{(4\,x - \pi)\tan(x)} \quad \text{en } \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1} \quad \text{en } 0$$

$$x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}} \quad \text{en } 0$$

$$\left(2x^2-3x+1\right)\tan(\pi x) \quad \text{en } \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1}) \quad \text{en } +\infty$$

Partie III - Développements limités :

Exercice 13. -
Déterminer les ordres pour lesquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1. $x \longmapsto \sqrt{x}$.
2. $x \longmapsto x^{\frac{17}{4}}$.
3. $x \longmapsto |x|^n$.

Exercice 14. -

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3\sin(\frac{1}{x})$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Exercice 15. -
Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 16. -
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. -
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$.
2. $DL_3(2)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$.
3. $DL_3(1)$ de $f_2(x) = (\sqrt{x}-1)\ln x$.

Exercice 18. -
Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \tan(x)$, à l'ordre 4.
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$, à l'ordre 3.
3. $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, à l'ordre 4.
4. $f_4(x) = \cos(x^2)\sin x$, à l'ordre 6.

Exercice 19. -
Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

2. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 3).
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 3).
4. $x \mapsto \exp(\cos(x))$ (à l'ordre 4).
5. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 20. -
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_2(1)$ de $f_1(x) = \cos(\ln x)$.
2. $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f_2(x) = \ln(\tan x)$.
3. $DL_2(1)$ de $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

Exercice 21. -
Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$
3. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1-\cos x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right)$

Exercice 22. -
Etudier, au voisinage de 1, la fonction définie par $g(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{2+2x}$.
On demande de déterminer la tangente, la position de la courbe par rapport à cette tangente et l'allure de la courbe au voisinage de 1.

Exercice 23. -
On sait que la fonction définie par $f(x) = \arctan(x)$, réciproque de la fonction tangente, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Donner un développement limité d'ordre 5 en 0 de f.
2. Montrer que $\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. En déduire un développement asymptotique d'ordre 3 de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 24. -
Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

1. $y = \sqrt{x^3(x+1)}$.
2. $y = \sqrt{x(x+1)}$.
3. $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
4. $y = (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.
5. $y = (x+1)\arctan(1+2/x)$.
6. $y = x.\arctan x.e^{1/x}$.
7. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.
8. $y = \sqrt{x^2-x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.