Analyse Asymptotique

Comparaisons de suites

Exercice 1

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ alors $u_n \sim v_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(v_n)$.
4. Si $u_n \sim v_n$ alors $(u_n - v_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
5. $\dfrac{3^n}{n} = O(2^n)$

Solution

1. VRAI
$u_n = o(v_n) \quad \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 \quad \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n}$ convergente donc bornée $\Longrightarrow u_n = O(v_n)$.
2. FAUX
$u_n = 1$ =constante, et $v_n = 2$ =constante.
On a bien $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
Mais : u_n n'est pas du tout équivalente à v_n.
3. VRAI
$u_n \sim v_n \quad \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \quad \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - v_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \Longrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$
4. FAUX Mais on ne peut pas du tout en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
En effet, si on prend : $u_n = n + 1$ et $v_n = n$, on a bien $u_n \sim v_n$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 1$.
5. FAUX
$r_n = \dfrac{\frac{3^n}{n}}{2^n} = \dfrac{3^n}{n2^n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n}$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}{x} = +\infty$ par croissances comparées.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. Cette suite n'est donc pas bornée.
$$\frac{3^n}{n} \neq O\left(2^n\right)$$

Exercice 2

Donner des équivalents simples des suites ci-dessous :

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ b) $v_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)$ c) $w_n = \sqrt{1 + \sqrt{n}}$

d) $x_n = \sqrt{n^3 + 2n^2} - \sqrt{n^3 + n^2}$ e) $y_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$

Solution

1. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car la suite $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0.
2. $v_n = \ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) = \ln\left(n\left(1 + \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right)$
$v_n = \ln(n) + \ln\left(1 + \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}\right)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2}}\right) = \ln(2) \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty.$

Donc $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = o(\ln(n))$

Par conséquent : $\qquad v_n \sim \ln(n).$

3. $w_n = \sqrt{1+\sqrt{n}}$

   On sait que : $\displaystyle \sqrt{1+u_n}-1 \sim \frac{1}{2}u_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{1+u_n} = 1+\frac{1}{2}u_n + o(u_n)$

   Mais cette relation suppose que la suite u_n converge vers 0, ce qui n'est pas du tout le cas de la suite $\sqrt{n}$. Cette relation d'équivalence ne servira à rien ici.

   On peut établir très facilement que : $\quad 1+\sqrt{n} \sim \sqrt{n}$

   Il suffit alors d'élever à la puissance $\frac{1}{2}$. pour obtenir : $\quad w_n = \sqrt{1+\sqrt{n}} \sim \sqrt{\sqrt{n}} = \sqrt[4]{n} = n^{\frac{1}{4}}$

4. On cherche un équivalent simple de la suite : $x_n = \sqrt{n^3+2n^2} - \sqrt{n^3+n^2}$

   $$x_n = \sqrt{n^3+2n^2} - \sqrt{n^3+n^2} = \frac{n^2}{\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+n^2}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

   $$x_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{n^2}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}} \sim 2.$$

   Par conséquent : $\quad x_n \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2}$

   Autre méthode :

   $$x_n = \sqrt{n^3+2n^2} - \sqrt{n^3+n^2} = \sqrt{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

   Nous avons besoin d'additionner des équivalents à chacune des racines carrées, mais cette opération est totalement interdite.

   On va donc utiliser la forme équivalente qui fait intervenir des petits "o" .

   $$\sqrt{1+u_n}-1 \sim \frac{1}{2}u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{1+u_n} = 1+\frac{1}{2}u_n + o(u_n)$$

   $$x_n = \sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{n^3}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}+o\left(\frac{2}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

   $$x_n = \sqrt{n^3}\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{2}{n}\right)-o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n^3}\left(\frac{1}{2n}+2\times o\left(\frac{1}{n}\right)-o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n^3}\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

   $$x_n = \frac{\sqrt{n^3}}{2n} + \sqrt{n^3}\, o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2} + o\left(\frac{\sqrt{n^3}}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2} + o\left(\sqrt{n}\right) \quad .$$

   Conséquence : $\quad x_n \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2}$

5. On cherche un équivalent simple de : $\quad y_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$

   La division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne : $n^2+n+1 = n(n+1)+1$.

   Ce qui permet d'écrire :

   $$y_n = \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{n+1}\right)\pi\right) = \sin\left(n\pi+\frac{1}{n+1}\pi\right)$$

   Or on sait que : $\quad \sin(x+n\pi) = \sin(x)\cos(n\pi)+\cos(x)\sin(n\pi) = (-1)^n\sin(x)$

   On en déduit :

   $$y_n = \sin\left(n\pi+\frac{1}{n+1}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

   Comme $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n+1} = 0$, on peut appliquer la rélation : $\sin(u_n) \sim u_n$.

   Ce qui donne : $\displaystyle \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \sim \frac{\pi}{n+1}$

   Finalement :

   $$y_n \sim \frac{(-1)^n\pi}{n+1}$$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes en utilisant des équivalents.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Solution

1. $a_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ avec $x\in\mathbb{R}^*$.

   $a_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$

   On sait que : $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\sim\dfrac{x}{n}$.

   On en déduit : $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\sim n\dfrac{x}{n}=x$

   On peut être tenté de dire que : $a_n=e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\sim e^x \implies \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=e^x$

   Ce raisonnement est faux!!!

   On n'a pas le droit de composer une relation d'équivalente à gauche par une fonction.

   La bonne méthode est de dire :

   $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\sim x\neq 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)=x.$

   On peut alors composer par la fonction exponentielle. Ce qui donne :

   $$\lim_{n\to+\infty}exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=exp(x)\iff\lim_{n\to+\infty}a_n=e^x$$

2. $b_n=\sqrt[n]{n^2}$ a pour limite : 1.

3. $c_n=\sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)=\sin\left((n+1)\pi+\dfrac{2}{n+1}\pi\right)=(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)$

   On en déduit immédiatement :

   $$\lim_{n\to+\infty}c_n=0.$$

4. $$d_n=\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+n+1}=\frac{n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2+n+1}}$$

   $$d_n=\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

   On en déduit immédiatement :

   $$\lim_{n\to+\infty}d_n=\frac{1}{2}.$$

Exercice 4

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$.

b) $\ln(\cos\dfrac{1}{n})(\ln\sin\dfrac{1}{n})$.

c) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$.

d) $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Solution

1. On cherche un équivalent simple de : $x_n=\left(1+\sqrt{n}\right)^{-\sqrt{n}}=exp\left(-\sqrt{n}\ \ln\left(1+\sqrt{n}\right)\right)$

   $x_n=exp\left(-\sqrt{n}\times\ \ln\left(\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)=exp\left(-\sqrt{n}\times\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$

   $x_n=exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(\sqrt{n}\right)-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

   $=exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)\times exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

   On remarque que l'exposant du 2ème facteur vaut : $-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim-\sqrt{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=-1$

   Ce qui donne : $\lim\limits_{n\to+\infty}-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=-1\implies\lim\limits_{n\to+\infty}exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=e^{-1}$

   ce qui nous autorise à dire que :

   $$exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\sim e^{-1}$$

Finalement :

$$x_n = exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)\times exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad \sim exp\left(-\sqrt{n}\times\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)\times e^{-1}$$

Autrement dit : $$x_n \quad\sim\quad \sqrt{n}^{-\sqrt{n}}\times e^{-1} = \frac{1}{e\times\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$$

2. $y_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\times\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

— $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \;\sim\; \cos\left(\frac{1}{n}\right)-1$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1=0$ et $\ln(1+u_n)\sim u_n$

De même :

$\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 \;\sim -\frac{1}{2n^2}$

car $\cos(u_n)-1 \;\sim -\frac{u_n^2}{2}$

Finalement :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim-\frac{1}{2n^2}$$

— $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \;\sim\; \frac{1}{n}$

car $\sin(u_n)\sim u_n$

Il ne faut surtout pas composer par ln car on n'a pas le droit de composer une relation d'équivalence à gauche par une fonction.

On va partir de l'autre écriture de cette équivalence : $\sin(u_n) = u_n + o(u_n)$

On en déduit :

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \implies \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\left(1+n\times o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$\implies \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\left(1+o\left(n\times\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{n}(1+o(1))\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln(1+o(1))$

$\implies \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\ln(n)+\ln(1+o(1)) = a_n+b_n$

avec $a_n=-\ln(n)$ qui tend vers $-\infty$, et $b_n=\ln(1+o(1))$ qui tend vers 0.

Ainsi $b_n = o(a_n) \implies \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = a_n+b_n = a_n+o(a_n) \implies \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim a_n$

Autrement dit : $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim\; -\ln(n)$.

Conclusion :

$$y_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\times\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \;\sim -\frac{1}{2n^2}\times-\ln(n)$$

$$y_n\sim\frac{\ln(n)}{2n^2}$$

3. $z_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}}-1$

Comme on sait que : $(1+u_n)^\alpha-1 \;\sim\; \alpha u_n$ (pour α réel fixé et u_n suite convergeant vers 0.)

$$z_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$z_n\sim\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$$

4. $t_n = e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$

On sait que : $e^{u_n}-1 \;\sim u_n \iff e^{u_n} = 1+u_n+o(u_n)$

On en déduit : $t_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = 1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$

Conclusion :

$$t_n\;\sim 1$$

On aurait pu voir dès le début que $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=1 \implies t_n\sim 1$.

Mais attention, l'implication : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell \implies u_n\sim\ell$ n'est correcte que pour $\ell\in\mathbb{R}^*$.

Exercice 5

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \quad \sim \quad n!$.

Solution

— **Première idée :**
On met de côté le deriner terme =1.
$$\frac{u_n}{n!} = \frac{0!+1!+2!+...+n!}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + ... + \frac{(n-1)!}{n!} + 1$$
$$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + ... + \frac{1}{n} + 1$$
$\frac{u_n}{n!} - 1$ est une somme de termes qui tendent tous vers 0.
Mais, malheureusement, cela ne suffit pas pour dire que cette somme va elle même tendre vers 0.
Il suffit de penser à $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

— Deuxième idée :
On met de côté les 2 derniers termes :
$$\frac{u_n}{n!} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + ... + \frac{(n-2)!}{n!}$$
Sachant que : $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ et que pour tout $k \leqslant n-2$, on a : $\frac{k!}{n!} \leqslant \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$
On en déduit qure :
$$\frac{u_n}{n!} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \frac{2}{n!} + ... + \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$
C'est à dire : $\frac{u_n}{n!} - 1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$
Ce qu'on peut écrire :
$$1 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$
Le théorème des gendarmes implique :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = 1 \quad \Longrightarrow u_n \sim n!$$

Exercice 6

Soit s_n une suite de réels de limite 0 et telle que : $s_n + s_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. On suppose que (s_n) est décroissante, montrer que $s_n \sim \frac{1}{2n}$.
2. En considérant la suite $\left(\frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$, prouver que ce résultat est en défaut si (s_n) n'est pas décroissante.

Solution

1. On sait que : $s_n + s_{n+1} \sim \frac{1}{n} \iff \lim_{n\to+\infty} n \times (s_n + s_{n+1}) = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} (n-1) \times (s_{n-1} + s_n) = 1$
   On veut montrer que $s_n \sim \frac{1}{2n} \iff \lim_{n\to+\infty} 2n \times s_n = 1$
   s_n décroissante $\iff s_{n+1} \leqslant s_n \leqslant s_{n-1} \implies s_n + s_{n+1} \leqslant 2s_n \leqslant s_n + s_{n-1}$
   On multiplie par n, ce qui donne :
   $$n(s_n + s_{n+1}) \leqslant 2n \times s_n \leqslant n(s_n + s_{n-1})$$
   $\lim_{n\to+\infty} n \times (s_n + s_{n+1}) = 1$
   $\lim_{n\to+\infty} n \times (s_{n-1} + s_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1}(n-1) \times (s_{n-1} + s_n) = 1 \times 1 = 1$
   Le théorème des gendarmes implique alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} 2n \times s_n = 1 \quad \Longrightarrow s_n \sim \frac{1}{2n}$$
2. Posons $s_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   On a bien : $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$.
   D'autre part :
   $$s_n + s_{n+1} = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)} + (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= \frac{2n+1}{2n(n+1)} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \right) = \frac{2n+1}{2n(n+1)} + (-1)^n \left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n(n+1)}} \right)$$
$$= \frac{2n+1}{2n(n+1)} + (-1)^n \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n(n+1)}}$$

Le premier terme de cette somme $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ est équivalent à $\dfrac{1}{n}$.

En effet : $\quad 2n+1 \sim 2n \quad$ et $\quad (n+1) \sim n$.

Le deuxième terme $\dfrac{(-1)^n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n(n+1)}}$ est lui équivalent à $\;:\; \dfrac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}}$.

En effet : $\quad \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+1\right)$

puisque : $\quad \sqrt{1+u_n} = 1+\frac{1}{2}u_n+o(u_n)$

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(2+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n}}{2n}+o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)$$
$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2\sqrt{n}+o\left(2\sqrt{n}\right)$$

Par conséquent :

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \;\sim\; 2\sqrt{n}$$

D'un autre côté : $\qquad \sqrt{n(n+1)} \;\sim\; \sqrt{n\times n} = n$

On a ainsi réussi à écrire : $\;s_n + s_{n+1} = a_n + b_n$, avec :

$a_n = \dfrac{2n+1}{2n(n+1)} \;\sim\; \dfrac{1}{n} \qquad\qquad$ et $\quad b_n = \dfrac{(-1)^n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n(n+1)}} \;\sim\; \dfrac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}}$

On a évidemment : $b_n = o(a_n)$

Donc :

$$s_n + s_{n+1} \sim a_n \;\sim\; \frac{1}{n}$$

Mais cette suite $s_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas décroissante car : $s_1 = -\dfrac{1}{2}$, $s_2 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} > s_1$.

Et cette suite est équivalente à $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{2n} = o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \quad \Longrightarrow \; s_n \;\sim\; \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

A cause donc du fait que s_n n'est pas décroissante, le résultat démontré dans la question 1. n'est pas vérifié malgré le respect des autres hypothèses.

Règle d'or : $\quad u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n)$

Comparaison de fonctions

Exercice 7
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x+3x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^4)}{x(\tan(x)-sin(x))}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{\ln(\cos(x))}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{3e^{x^2}-5x^4}{\ln(7x^2)+2x}$

Solution

1.
$$\frac{\sin(x)}{x+3x^2}=\frac{\sin(x)}{x(1+3x)}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x(1)}=1$$
Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x+3x^2}=1$$

2. $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^4\right)}{x(\tan(x)-\sin(x))}=\dfrac{\sin\left(x^4\right)}{x\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)\right)}=\dfrac{\sin\left(x^4\right)}{x\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}\right)}=\dfrac{\sin\left(x^4\right)\cos(x)}{x\sin(x)(1-\cos(x))}$
On connaît des équivalents de chaque facteur, donc on peut écrire :
$$f(x)=\frac{\sin\left(x^4\right)\cos(x)}{x\sin x(1-\cos x)}\underset{0}{\sim}\frac{x^4\times 1}{x\times x\times\left(\frac{x^2}{2}\right)}=2$$
Par conséquent :
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^4\right)}{x(\tan(x)-\sin(x))}=2.$$

3. $g(x)=\sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$
On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)=0.$ et que $\ln(1+X)\underset{0}{\sim}X$
On en déduit :
$$\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{-1}{\sqrt{x}}$$
De la même manière :
$$\sqrt{4x+1}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$$
Finalement :
$$g(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-2$$
Conclusion :
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-2$$

4. $h(x)=\dfrac{e^{4x^2}-1}{\ln(\cos(x))}$
On sait que : $e^x-1\underset{0}{\sim}x$. On en déduit :
$$e^{4x^2}-1\underset{0}{\sim}4x^2$$
On sait également que : $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$. On en déduit :
$$\ln(\cos(x))=\ln(1+\cos(x)-1)\underset{0}{\sim}\cos(x)-1$$
On sait également que : $\cos(x)-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$. On en déduit :
$$\ln(\cos(x))\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$$

Il ne reste plus qu'à faire le rapport des deux :

$$h(x)=\frac{e^{4x^2}-1}{\ln(\cos(x))}\underset{0}{\sim}\frac{4x^2}{-\frac{x^2}{2}}$$

Conclusion :

$$h(x)\underset{0}{\sim}-8$$
$$\lim_{x\to 0}h(x)=-8$$

5. On cherche la limite en 0 de :

$$k(x)=\frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2}$$

$$x^4+3x^2+x\underset{0}{\sim}x\quad\text{et}\quad 2x^3+x^2\underset{0}{\sim}x^2\quad\Longrightarrow k(x)=\frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. (résultats différents en 0^- et 0^+).

Donc la fonction k n'a pas de limite en 0.

6. On cherche la limite en π de :

$$l(x)=\frac{3e^{x^2}-5x^4}{\ln\left(7x^2\right)+2x}$$

l est continue sur $\mathbb{R}^*$ car somme, composée et rapport de fonctions continues. Donc :

$$\lim_{x\to\pi}l(x)=l(\pi)=\frac{3e^{\pi^2}-5\pi^4}{\ln\left(7\pi^2\right)+2\pi}$$

Exercice 8

Calculer les limites de

a) $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ en 0. b) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$ en 0. c) $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0.

d) $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Solution

1. $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}\underset{0}{\sim}\dfrac{xx^2}{xx}=x$ Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}=0$
2. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}\underset{0}{\sim}\dfrac{\sin x}{6x}\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{6}$
3. Limite de $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$: Nous avons

$$(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}\;=\;\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\right).$$

Maintenant, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, nous pouvons écrire :

$$\ln(1+e^{-x})\underset{+\infty}{\sim}e^{-x}$$

et par l'**Exercice 11**, nous pouvons composer cette dernière equivalence avec la fonction ln, pour obtenir

$$\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\underset{+\infty}{\sim}\ln(e^{-x}).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)&\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(e^{-x})}{x}\\&=\frac{-x}{x}=-1.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-}x)\right)\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)\right)\\&=e^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice 9

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \left((x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Solution

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$: Nous avons :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$: Nous avons :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{et} \quad 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 2.$$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ où

$$f(x) = \left((x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(x+1) - \sqrt[3]{x^3+1} &= (x+1) - \sqrt[3]{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= (x+1) - x\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= 1 + x\left(1 - \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}\right)\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^3} &\Longrightarrow \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} - 1 - \frac{1}{3x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{3x^3}\right) \\ &\Longrightarrow \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{3x^3}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(x+1) - \sqrt[3]{x^3+1} &= 1 + x\left(1 - \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 1 + x\left(1 - 1 - \frac{1}{3x^3} - o\left(\frac{1}{3x^3}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 1 - x\left(\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{3x^3}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{3x^2} - o\left(\frac{1}{3x^2}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to +\infty} (x+1) - \sqrt[3]{x^3+1} = \lim_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{3x^2} - o\left(\frac{1}{3x^2}\right) = 1.$$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}\right)$: Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}\right) &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{x^3}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3}\right) \; = \; e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

5. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$: Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-(1-\cos x))}{1-\cos 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1-\cos 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{(2x)^2}{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{4x^2} \; = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

6. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$: Nous avons :

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \exp\left(x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) &= x\ln(x)\cdot\ln\left(1-\left(1-\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} x\ln(x)\cdot\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}-1\right) \\
&= x\cdot(\ln(x+1)-\ln(x)) \\
&= x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\
&= x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} x\cdot\frac{1}{x} \; = \; 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \lim_{x\to +\infty} \exp\left(x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to +\infty} x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\
&= e.
\end{aligned}$$

7. Calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$: Rappelons que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1-\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2x}{\pi}-1}{\frac{\pi}{2}-x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2x-\pi}{\pi}}{\frac{\pi-2x}{2}} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

8. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{e^{\frac{1}{x}}}-1\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(e^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}-1\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1\right)
\end{aligned}$$

Maintenant

$$e^x-1 \underset{0}{\sim} x \implies e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x(x+1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x+1}}-e^{\frac{1}{x}}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x(x+1)} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \\
&= -1\cdot 1 \;=\; -1.
\end{aligned}$$

Exercice 10

À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Solution

Tout d'abord, comme pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y},$$

on conclut que :

$$\begin{aligned}
e^f \underset{a}{\sim} e^g &\iff \lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \;=\; 1 \\
&\iff \lim_{x\to a} e^{f(x)-g(x)} \;=\; 1 \\
&\iff \exp\left(\lim_{x\to a} f(x)-g(x)\right) \;=\; 1 \\
&\iff \lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Conclusion : Nous avons trouve comme condition :

$$e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) \;=\; 0.$$

Attention : L'implication

$$f \underset{a}{\sim} g \implies e^f \underset{a}{\sim} e^g$$

n'est pas vrai en général. En effet, posons

$$f(x) = x^2 + x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2.$$

Alors

$$f \underset{\infty}{\sim} g,$$

mais

$$\lim_{x \to a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = +\infty.$$

<u>Exercice 11</u>

Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

<u>Solution</u>

Nous savons que :

$$u \underset{a}{\sim} v \iff u - v \underset{a}{=} o(v).$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\ln(f(x)) - \ln(g(x)) = o\left(\ln(f(x))\right),$$

c'est-à-dire, montrer

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(f(x)) - \ln(g(x))}{\ln(f(x))} = 0.$$

Nous avons

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln(f(x)) - \ln(g(x))}{\ln(f(x))} = \lim_{x \to a} \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \cdot \frac{1}{\ln(f(x))}$$

Maintenant, si on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\ln(f(x))} = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(\ell)} \in \mathbb{R} & \text{si } \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } \ell = 0 \text{ ou } \ell = +\infty. \end{cases}$$

<u>Exercice 12</u>

a) Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

b) Équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}$

c) Limite en 0 de $\dfrac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)}$

d) Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

e) Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{(4\,x - \pi)\tan(x)}$

f) Équivalent en 0 de $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$

g) Limite en 0 de $x^{\frac{1}{1 + 2\,\ln(x)}}$

h) Limite en $\dfrac{1}{2}$ de $\left(2\,x^2 - 3\,x + 1\right)\tan(\pi\,x)$

i) Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$

<u>Solution</u>

1. Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$: Nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)$$

Maintenant

$$\sqrt[3]{1\pm\frac{1}{x}}-1 \underset{+\infty}{\sim} \pm\frac{1}{3x} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[3]{1\pm\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1\pm\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{3x}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2} &= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{3x}\right)-1+\frac{1}{3x}-o\left(\frac{1}{3x}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{3x}\right)-o\left(\frac{1}{3x}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}+o(1)-o(1)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}+o(1)\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. Équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2} &= \sqrt{x^2 + x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}-x\sqrt{2}\\
&= x\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}-x\sqrt{2}\\
&= x\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}-\sqrt{2}\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x\cdot\left(\sqrt{1+1+\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}-\sqrt{2}\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x\cdot\left(\sqrt{2\left(1+\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}-\sqrt{2}\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}-1\right)\\
&\underset{+\infty}{=} x\sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)-1\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2} &\underset{+\infty}{=} x\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{4}o\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{2}o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{\sim} x\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{8x^4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8x^3}.
\end{aligned}$$

3. Limite en 0 de $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)} &= \frac{\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}-\sin(ax)}{\frac{\sin(bx)}{\cos(bx)}-\sin(bx)} \\
&= \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\cdot\frac{\frac{1-\cos(ax)}{\cos(ax)}}{\frac{1-\cos(bx)}{\cos(bx)}} \\
&\underset{0}{\sim} \frac{ax}{bx}\cdot\frac{\frac{a^2x^2}{2}}{\frac{b^2x^2}{2}}\cdot\frac{\cos(bx)}{\cos(ax)} \\
&= \frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{\cos(bx)}{\cos(ax)}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{\cos(bx)}{\cos(ax)} = \frac{a^3}{b^3}.$$

4. Limite en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$: À l'aide du changement de variable

$$u = x-\frac{\pi}{4},$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{u\to 0} u\cdot\tan\left(u+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \lim_{u\to 0} u\cdot\frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin(u)} \\
&= \lim_{u\to 0} -\frac{u}{\sin(u)}\cdot\lim_{u\to 0}\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -1\cdot 1 = -1.
\end{aligned}$$

5. Limite en $\frac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)}{(4x-\pi)\tan(x)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{(4x-\pi)\tan(x)} \\
&\underset{\frac{\pi}{4}}{\sim} \frac{2}{\sqrt{2}\tan(x)}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}-x}{4x-\pi} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}\tan(x)}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\sqrt{2}\tan(x)}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan(x)} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

6. Équivalent en 0 de $\dfrac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$: On commence par noter que

$$\lim_{x\to 0} x-x\cos(x) = 0.$$

Donc

$$\tan(x-x\cos(x)) \underset{0}{\sim} x-x\cos(x).$$

Maintenant

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0.$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 1$$

Donc

$$\sin(x)+\cos(x)-1 \underset{0}{\sim} x.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x-x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1} &\underset{0}{\sim} \frac{x-x\cos(x)}{x} \\ &= 1-\cos(x) \\ &\underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

7. Limite en 0 de $x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$: Nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{1+2\,\ln(x)}\ln(x)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1+2\,\ln(x)}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{2\,\ln(x)}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{e}. \end{aligned}$$

8. Limite en $\frac{1}{2}$ de $\left(2\,x^2-3\,x+1\right)\tan(\pi\,x)$: Nous avons

$$2\,x^2-3\,x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-2)\,.$$

Ainsi, à l'aide du changement de variable

$$u = x-\frac{1}{2},$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(2\,x^2-3\,x+1\right)\tan(\pi x) &= \lim_{u\to 0} u\,(2u-1)\tan\left(\pi u+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lim_{u\to 0} u\,(2u-1)\frac{\sin\left(\pi u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\pi u+\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \lim_{u\to 0} u\,(2u-1)\frac{\sin\left(\pi u+\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin(\pi u)} \\ &= -\lim_{u\to 0}\frac{u\,(2u-1)}{\pi u} \\ &= -\frac{1}{\pi}\lim_{u\to 0}(2u-1) \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

9. Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$: Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^2}}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x+1}\right)\\ &= -\frac{x^2}{(x+1)}\\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{x}\\ &= -x.\end{aligned}$$

Développements limités

Exercice 13

Déterminer les ordres pour lesquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

a) $x \longmapsto \sqrt{x}$. b) $x \longmapsto x^{\frac{17}{4}}$. c) $x \longmapsto |x|^n$.

Solution

1. $f(x) = \sqrt{x}$: La fonction

$$x \longmapsto \sqrt{x},$$

est continue mais n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Ainsi, en zéro, f admet uniquement un D.L à l'ordre 0.

2. $f(x) = x^{\frac{17}{4}}$: Notons que :

$$f(x) = x^{\frac{17}{4}} = x^{\frac{16+1}{4}} = x^4\cdot x^{\frac{1}{4}}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^4\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}} = 0.$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^4).$$

Par conséquent, en zéro, f admet le D.L à l'ordre 4 suivant :

$$x^{\frac{17}{4}} \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + o(x^4).$$

Montrons que f n'admet pas de D.L à l'ordre 5 ou superieur en zéro. Pour cela, notons que si f admet un D.L à l'ordre 5 en zéro, alors

$$\begin{aligned} & x^{\frac{17}{4}} \underset{x\to 0}{=} a_5\cdot x^5 + o(x^5)\\ \Longrightarrow\ & \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{17}{4}}}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} a_5 + o(1) < +\infty.\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{17}{4}}}{x^5} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^4\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^5} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = +\infty.$$

Ainsi, f n'admet pas de D.L à l'ordre 5 en zéro. Ce qui implique que f admet uniquement des D.L à l'ordre 4 ou inferieur en zéro.

3. $f(x) = |x|^n$: Notons que :

$$|x|^n = (\mathrm{sgn}(x))^n\cdot x^n.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{n-1}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sgn}(x))^n \cdot x^n}{x^{n-1}} \;=\; \lim_{x\to 0} (\mathrm{sgn}(x))^n \cdot x \;=\; 0.$$

Donc

$$|x|^n \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1}).$$

Par conséquent, en zéro, f admet le D.L à l'ordre $n-1$ suivant :

$$|x|^n \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Maintenant, si n **est pair**, nous pouvons écrire

$$|x|^n \;=\; x^n \quad \Longrightarrow \quad \forall k \geq n, \quad |x|^n \underset{x\to 0}{=} x^n + o(x^k).$$

Ainsi, pour n pair, la fonction $x \longmapsto |x|^n$ admet un D.L à tout ordre en zéro.

Montrons finalement que si n **est impair**, alors f n'admet pas de D.L à l'ordre n ou superieur en zéro. Pour cela, notons que si f admet un D.L à l'ordre n en zéro, alors

$$\begin{aligned} |x|^n &\underset{x\to 0}{=} a_n \cdot x^n + o(x^n) \\ \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|^n}{x^n} &= \lim_{x\to 0} a_n + o(1) \end{aligned}$$

Ce qui implique l'existence de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^n}{x^n}$. Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^n}{x^n} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sgn}(x))^n \cdot x^n}{x^n} \;=\; \lim_{x\to 0} (\mathrm{sgn}(x))^n .$$

Et cette dernière limite n'existe pas. Par conséquent, pour n impair, la fonction $x \longmapsto |x|^n$ n'admet pas de D.L à l'ordre n en zéro. Ce qui implique que pour n impair, la fonction $x \longmapsto |x|^n$ admet uniquement des D.L à l'ordre $n-1$ ou inferieur en zéro.

Exercice 14

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de f en 0. Quelles conclusions en tirer ?
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et, si $x \neq 0$: $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

Solution

1. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le changement de variable

$$\frac{1}{x} = u,$$

nous permet de conclure

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} \;=\; \lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{-n}} \;=\; \lim_{u\to+\infty} \frac{u^n}{e^u} \;=\; 0.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\; f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n).$$

Par conséquent, en zéro, f admet le D.L à l'ordre n suivant :

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + o(x^n).$$

Quelles conclusions en tirer ? La conclusion à en tirer est que, le fait que la partie régulière d'un D.L soit nulle à n'importe quel ordre n'implique pas que la fonction développée soit nulle. Autrement dit, deux fonctions ayant des parties régulières égales à n'importe quel ordre ne sont pas pour autant égales.

2. On commence par noter que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\, x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; 0.$$

Ainsi

$$x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} o(x^2).$$

Par conséquent, en zéro, f admet le D.L à l'ordre 2 suivant :

$$x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2).$$

Maintenant, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a

$$\forall x \neq 0, \quad g'(x) = 3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

De plus, en utilisant le D.L à l'ordre 2 en zéro de g, on conclut que

$$\lim_{x\to 0} x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; \lim_{x\to 0} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2) \;=\; 0.$$

Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$g(0) = 0.$$

Ce même D.L nous permet de conclure que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0} o(x) \;=\; 0.$$

Ainsi, le prolongement de g est dérivable en 0 avec

$$g'(0) = 0.$$

Or g n'est pas deux fois dérivable en 0 car

$$\begin{aligned} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} \;&=\; \frac{3x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &=\; 3x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{n'a pas de limite en 0.} \end{aligned}$$

Exercice 15

Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Etudier la dérivabilité du prolongement de f.

Solution

1. Nous avons

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x}} \; = \; \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos(x))\right).$$

Maintenant

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + o\left(x^2\right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos(x))\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(-\frac{x}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o\left(x^2\right) + \frac{\left(-\frac{x}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o\left(x^2\right) + \frac{x^2}{8} - \frac{1}{2}x \cdot o(x^2) + \frac{1}{2}o\left(x^2\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x}{2} + o\left(x^2\right)\right)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).
\end{aligned}$$

En utilisant le D.L à l'ordre 2 en zéro de f, on conclut que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$f(0) = 1.$$

2. Ce même D.L nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x))^{\frac{1}{x}} - 1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{8} + o(x) \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le prolongement de f est dérivable en 0 avec

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 16

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \cdot \frac{1}{1+x^6} \\
&= x^3 \cdot \frac{1}{1-(-x^6)} \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 \left(1 - x^6 + x^{12} - x^{18} + \cdots + (-1)^n x^{6n} + o(x^{6n})\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 - x^9 + x^{15} - x^{21} + \cdots + (-1)^n x^{3+6n} + o(x^{6n+3}) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{3+6k} + o(x^{6n+3}).
\end{aligned}$$

Maintenant, f est une fonction de classe C^∞, d'après la formule de Taylor nous pouvons donc écrire

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Par unicité des DL, en identifiant les coefficients devant x^n, on trouve :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 3+6k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant, si $n = 3+6k$ alors on peut écrire

$$k = \frac{n-3}{6}.$$

Par conséquent

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-3}{6}} n! & \text{si } n = 3 \pmod 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 17

Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_3(0)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$. b) $DL_3(2)$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$. c) $DL_3(1)$ de $f_2(x) = (\sqrt{x}-1)\ln x$.

Solution

1. **$\mathbf{DL_3(0)}$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$:** Tout d'abord, notons que la fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^3$ (en fait elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$). Pour trouver le D.L nous pouvons donc utiliser la formule de Taylor. Pour cela, calculons les trois premiers dérivées de f_1. Nous avons

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 4x^3 - 2x. \\
f_1''(x) &= 12x^2 - 2. \\
f_1'''(x) &= 24x.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} f_1(0) + f_1'(0)x + \frac{f_1''(0)}{2!}x^2 + \frac{f_1'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + 0\cdot x - \frac{2}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

2. **$\mathbf{DL_3(2)}$ de $f_1(x) = x^4 - x^2 + 1$:** Rappelons que les trois premiers dérivées de f_1 sont :

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 4x^3 - 2x. \\
f_1''(x) &= 12x^2 - 2. \\
f_1'''(x) &= 24x.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Taylor en 2, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 2}{=} f_1(2) + f_1'(2)(x-2) + \frac{f_1''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f_1'''(2)}{3!}(x-2)^3 + o((x-2)^3) \\
&\underset{x\to 2}{=} 13 + 28\cdot(x-2) + 23(x-2)^2 + 8\cdot(x-2)^3 + o((x-2)^3).
\end{aligned}$$

3. **DL**$_3(1)$ **de** $f_2(x) = (\sqrt{x} - 1)\ln(x)$ **:** On commence par noter que :

$$\ln(x) \;=\; \ln(1 + (x-1)) \quad\Longrightarrow\quad \ln(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

De même

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - 1 \;=\; \sqrt{1 + (x-1)} - 1 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x} - 1 &\underset{x\to 1}{=} \Big(1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} \\ &\qquad + o\left((x-1)^2\right)\Big) - 1 \\ &\underset{x\to 1}{=} \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o\left((x-1)^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - 1)\ln(x) &\underset{x\to 1}{=} \left(\frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + o\left((x-1)^2\right)\right) \cdot \Big((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} \\ &\qquad + o\left((x-1)^2\right)\Big) \\ &\underset{x\to 1}{=} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{4} + \frac{(x-1)}{2}\cdot o((x-1)^2) - \frac{(x-1)^3}{8} + \\ &\qquad o\left((x-1)^3\right) + o\left((x-1)^2\right)\cdot\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\left((x-1)^2\right)\right) \\ &\underset{x\to 1}{=} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{3(x-1)^3}{8} + o\left((x-1)^3\right).\end{aligned}$$

Exercice 18

Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = \tan(x)$, à l'ordre 4. b) $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$, à l'ordre 3. c) $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$, à l'ordre 4.

Solution

1. **DL**$_4(0)$ **de** $f_1(x) = \tan(x)$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} \\ &= \frac{1}{1-u},\end{aligned}$$

avec

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad\Longrightarrow\quad u^2 \;=\; \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-u} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\cdot\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).\end{aligned}$$

2. **$\mathrm{DL}_3(0)$ de $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) \cdot \frac{1}{1-u},
\end{aligned}$$

avec

$$u = \frac{x^2}{6} + o(x^3) \quad \Longrightarrow \quad u^2 \;=\; o(x^3)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) \cdot \frac{1}{1-u}\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + u + u^2 + o(u^2)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3) + o\left(\left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

3. **$\mathrm{DL}_4(0)$ de $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Ainsi

$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}\\
&= \sqrt{2\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)}\\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right)^2\right.\\
&\qquad\left. + \, o\left(\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right)^2\right.\\
&\qquad\left. + \, o\left(\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right)^2\right)\right)\\
&= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{8} - \frac{3\sqrt{2}x^4}{128} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Exercice 19

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

a) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3). b) $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 3). c) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 3).

d) $x \mapsto \exp(\cos(x))$ (à l'ordre 4). e) $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Solution

1. **DL$_3$(0) de** $f(x) = \exp(\sin(x))$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Ainsi

$$\exp(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3!} + o(\sin^3(x)).$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ \Longrightarrow \quad \sin^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^3) \\ \Longrightarrow \quad \sin^3(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \exp(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2!} + \frac{\sin^3(x)}{3!} + o(\sin^3(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2 + o(x^3)}{2!}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{x^3 + o(x^3)}{3!}\right) + o\left(x^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

2. **DL$_3$(0) de** $f(x) = \sin(\tan(x))$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Ainsi

$$\sin(\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan^3(x)}{3!} + o(\tan^3(x)).$$

Maintenant, d'après l'exercice 18.1, nous avons

$$\begin{aligned} \tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \Longrightarrow \quad \tan^3(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sin(\tan(x)) &\underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan^3(x)}{3!} + o(\tan^3(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x^3 + o(x^3)}{3!}\right) + o\left(x^3 + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

3. **DL$_3$(0) de** $f(x) = (\ln(1+x))^2$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x)\cdot\ln(1+x)\\
&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\cdot\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\\
&= x\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right) - \frac{1}{2}x^2\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\\
&\quad +\frac{1}{3}x^3\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right) + o(x^3)\cdot\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)\\
&= \left(x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)-\left(\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)+o(x^3)\\
&= x^2-x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

4. **DL$_4(0)$ de** $f(x)=\exp(\cos(x))$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp(\cos(x)) &= \exp(1+(\cos(x)-1))\\
&= e\cdot\exp(\cos(x)-1)\\
&\underset{x\to 0}{=} e\Bigg(1+(\cos(x)-1)+\frac{(\cos(x)-1)^2}{2!}+\frac{(\cos(x)-1)^3}{3!}\\
&\qquad +\frac{(\cos(x)-1)^4}{4!}+o\left((\cos(x)-1)^4\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\\
\Longrightarrow\quad (\cos(x)-1) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\\
\Longrightarrow\quad (\cos(x)-1)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
\Longrightarrow\quad (\cos(x)-1)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^4)
\end{aligned}$$

Finalement

$$(\cos(x)-1)^4 \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\exp(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} e\Bigg(1+(\cos(x)-1)+\frac{(\cos(x)-1)^2}{2!}+\frac{(\cos(x)-1)^3}{3!}\\
&\qquad +\frac{(\cos(x)-1)^4}{4!}+o\left((\cos(x)-1)^4\right)\Bigg)\\
&\underset{x\to 0}{=} e\Bigg(1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\left(\frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{2}\right)+\left(\frac{o(x^4)}{3!}\right)\\
&\qquad +\frac{o(x^4)}{4!}+o\left(x^4\right)\Bigg)\\
&\underset{x\to 0}{=} e-\frac{e\cdot x^2}{2}+\frac{e\cdot x^4}{6}+o(x^4).
\end{aligned}$$

5. **DL$_9(0)$ de** $f(x)=\sin^6(x)$ **:** Tout d'abord, rappelons que :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Ainsi

$$\sin^6(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^6.$$

Par conséquent, lorsque l'on développe (à l'aide du binôme de Newton) ce produit en commençant par les termes de plus petits degrés, on obtient

$$\begin{aligned}\sin^6(x) &\underset{x\to 0}{=} x^6 + 6\cdot x^5 \cdot \left(-\frac{x^3}{3!}\right) + o(x^9)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9).\end{aligned}$$

Exercice 20

Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_2(1)$ de $f_1(x) = \cos(\ln x)$. b) $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $f_2(x) = \ln(\tan x)$. c) $DL_2(1)$ de $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$.

Solution

a) On a

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o\left(u^4\right)$$

$$f_1(1+h) = \cos(\ln(1+h)) = \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + o\left(h^2\right)$$

Donc $f(x) == 1 - \frac{1}{2}h^2 + o\left(h^2\right) + = 1 - \frac{1}{2}(x-1)h^2 + o\left((x-1)^2\right)$

b) On a

$$f_2'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x},$$

$$f_2''(x) = \frac{\tan x(2\tan x)\left(1+\tan^2 x\right) - \left(1+\tan^2 x\right)^2}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\left(1+\tan^2 x\right)\left(\tan^2 x - 1\right)}{\tan^2 x} = \frac{\tan^4 x - 1}{\tan^2 x}$$

$$f_2'''(x) = \frac{\left(\tan^2 x\right) 4\tan^3 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^4 x - 1\right) 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}{\tan^4 x}$$

$$= \frac{\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\left(4\tan^4 x - \left(\tan^4 x - 1\right)2\right)}{\tan^4 x}$$

$$= \frac{\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\left(2 + 2\tan^4 x\right)}{\tan^4 x}$$

$$= \frac{2\left(1+\tan^2 x\right)^2\tan x}{\tan^3 x}$$

La formule de Taylor-Young donne :

$$\ln\tan x = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{8}{3\times 2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

$$\ln\tan x = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{3} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

c) On a

$$f_3(1+h) = \frac{\sqrt{1+h}-1}{\ln(1+h)} = \frac{\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + o\left(h^3\right)}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + o\left(h^2\right)}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o\left(h^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + o\left(h^2\right)\right)\left(1 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3}\right) + \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + o\left(h^2\right)\right)\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o\left(h^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{12} + o\left(h^2\right)\right)$$

donc $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{8} - \dfrac{(x-1)^2}{24} + o\left((x-1)^2\right)$

Exercice 21

Déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$

Solution

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\Big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\Big)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\left(2x+o\left(x^2\right)\right)\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(2+o(x)\right)\\
&= e^2.
\end{aligned}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1} &= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e+x-e}-\sqrt{e}}{\ln(e+x-e)-1}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\sqrt{1+\frac{x-e}{e}}-\sqrt{e}}{\ln\left(e\left(1+\frac{x-e}{e}\right)\right)-1}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{1+\frac{x-e}{e}}-1\right)}{\ln(e)+\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)-1}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{1+\frac{x-e}{e}}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-e}{e}+o(x-e)-1\right)}{\frac{x-e}{e}+o(x-e)}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\cdot(x-e)\left(\frac{1}{2e}+o(1)\right)}{(x-e)\left(\frac{1}{e}+o(1)\right)}\\
&= \lim_{x\to e}\frac{\sqrt{e}\left(\frac{1}{2e}+o(1)\right)}{\left(\frac{1}{e}+o(1)\right)} = \frac{\frac{\sqrt{e}}{2e}}{\frac{1}{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2}.
\end{aligned}$$

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{3x}{3}-\frac{9x^2}{9}+o(x^2)-1-x+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(-1+o(1)\right)}{x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

5. Déterminer $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}+o(1) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6. Déterminer $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right)$: Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)+o\left(\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{3!}+o(1) \\
&= -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 22

Etudier, au voisinage de 1, la fonction définie par $g(x) = x+2\sqrt{x}-\sqrt{2+2x}$.
On demande de déterminer la tangente, la position de la courbe par rapport à cette tangente et l'allure de la courbe au voisinage de 1.

Solution

Tout d'abord, notons que :

$$\begin{aligned}
x+2\sqrt{x}-\sqrt{2+2x} &= 1+(x-1)\ +\ 2\sqrt{1+(x-1)}\ -\ \sqrt{4+2(x-1)} \\
&= 1+(x-1)\ +\ 2\sqrt{1+(x-1)}\ -\ 2\sqrt{1+\frac{(x-1)}{2}} \\
&\underset{x\to 1}{=} 1+(x-1)+2\left(1+\frac{(x-1)}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+o((x-1)^2)\right) \\
&\qquad -2\left(1+\frac{(x-1)}{4}-\frac{(x-1)^2}{32}+o((x-1)^2)\right) \\
&\underset{x\to 1}{=} 1+\frac{3(x-1)}{2}-\frac{3(x-1)^2}{16}+o((x-1)^2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$g(x) \underset{x\to 1}{=} 1+\frac{3(x-1)}{2}-\frac{3(x-1)^2}{16}+o((x-1)^2)$$

et la tangente de g en 1 est donnée par la droite :

$$y = 1+\frac{3(x-1)}{2}.$$

Trouvons la position de la courbe par rapport à cette tangente. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_2(1)$ de g nous permet de conclure

$$g(x)-\left(1+\frac{3(x-1)}{2}\right) \underset{x\to 1}{=} -\frac{3(x-1)^2}{16}+o((x-1)^2).$$

Ainsi

$$g(x)-\left(1+\frac{3(x-1)}{2}\right) \underset{1}{\sim} -\frac{3(x-1)^2}{16} \leq 0.$$

Par conséquent, la courbe est **en-dessous** de sa tangente en 1. Finalement, la courbe à l'allure d'une droite au voisinage de 1.

Exercice 23

On sait que la fonction définie par $f(x) = \arctan(x)$, réciproque de la fonction tangente, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Donner un développement limité d'ordre 5 en 0 de f.
2. Montrer que $\forall x>0,\quad \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.
3. En déduire un développement asymptotique d'ordre 3 de f au voisinage de $+\infty$.

Solution

1. Donner un développement limité d'ordre 5 en 0 de f : Nous avons

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan(0)+\frac{x^{0+1}}{0+1}-\frac{x^{2+1}}{2+1}+\frac{x^{4+1}}{4+1}+o(x^{4+1})\\ &\underset{x\to 0}{=} \arctan(0)+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\end{aligned}$$

2. Montrer que $\forall x>0,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$: Posons

$$F(x) = \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall x>0,\quad F'(x) &= \arctan'(x)+\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\\ &= \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2} = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, F est une fonction constante, c'est-à-dire

$$\forall x>0,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = C\in\mathbb{R}.$$

En particulier, pour $x = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} C &= \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) &= 2\arctan(1) \\ & &= 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que, pour tout $x > 0$, nous avons

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. En déduire un développement asymptotique d'ordre 3 de f au voisinage de $+\infty$: D'après la question précédente, nous pouvons écrire

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Maintenant, quand

$$x \to +\infty \implies \frac{1}{x} \to 0.$$

Ainsi, à l'aide du $\mathbf{DL}_3(0)$ de $\arctan(x)$ trouvé dans la question 1, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Exercice 24

Rechercher si les courbes suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

a) $y = \sqrt{x(x+1)}$.

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

c) $y = (x^2 - 1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

d) $y = (x+1)\arctan(1 + 2/x)$.

e) $y = x.\arctan x.e^{1/x}$.

f) $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$.

g) $y = \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

Solution

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$: Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{x(x+1)} &= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la droite

$$y = x + \frac{1}{2}$$

est asymptote à la courbe. Trouvons la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_1(\infty)$ que nous avons trouvé, nous permet de conclure que

$$\sqrt{x(x+1)} - x - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x} \leq 0, \quad \text{si } x > 0.$$

Par conséquent, la courbe est **en-dessous** de sa asymptote.

2. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$: Posons $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Pour trouver l'asymptote à la courbe, on pose

$$u = \frac{1}{x}$$

et on étudie la fonction

$$\frac{f(x)}{x} = u \cdot f\left(\frac{1}{u}\right) = u\sqrt{\frac{\frac{1}{u^3}}{\frac{1}{u}-1}} = u\sqrt{\frac{1}{u^2(1-u)}} = \frac{1}{\sqrt{1-u}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-u}} &\underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{(-u)}{2} + \frac{3(-u)^2}{8} + o((-u)^2) \\ &\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite

$$y = x + \frac{1}{2}$$

est donc asymptote à la courbe. Trouvons la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_1(\infty)$ que nous avons trouvé, nous permet de conclure que

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} +\frac{3}{8x} \geq 0, \quad \text{si } x > 0.$$

Par conséquent, la courbe est **au-dessus** de sa asymptote.

3. $y = (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$: Posons $f(x) = (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Pour trouver l'asymptote à la courbe, on pose

$$u = \frac{1}{x}$$

et on étudie la fonction

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= u \cdot f\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= u\left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}-1}\right) \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}-1}\right) &= (1-u^2)\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \\ &= (1-u^2)\frac{1}{u}\big(\ln(1+u) - \ln(1-u)\big) \\ &\underset{u\to 0}{=} (1-u^2)\frac{1}{u}\Bigg(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\ &\qquad - \left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)\right)\Bigg) \\ &\underset{u\to 0}{=} (1-u^2)\frac{1}{u}\left(2u + \frac{2u^3}{3} + o(u^3)\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\ln\left(\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}-1}\right) &\underset{u\to 0}{=} (1-u^2)\frac{1}{u}\left(2u+\frac{2u^3}{3}+o(u^3)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} (1-u^2)\left(2+\frac{2u^2}{3}+o(u^2)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} 2-2u^2+\frac{2u^2}{3}+o(u^2) \\
&\underset{u\to 0}{=} 2-\frac{4u^2}{3}+o(u^2)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 2-\frac{4}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où

$$(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 2x-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite

$$y = 2x$$

est donc asymptote à la courbe.
Trouvons la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_1(\infty)$ que nous avons trouvé, nous permet de conclure que

$$(x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2x \underset{+\infty}{\sim} -\frac{4}{3x} \leq 0, \quad \text{si } x>0.$$

Par conséquent, la courbe est **en-dessous** de sa asymptote.

4. $y = x\cdot\arctan x\cdot e^{1/x}$: Tout d'abord, rappelons que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Donc

$$e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

De plus, d'après l'exercice 23.1, nous avons

$$\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
x\cdot\arctan x\cdot e^{1/x} &\underset{x\to+\infty}{=} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{\pi x}{2}-1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}-1+\frac{\frac{\pi}{4}-1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la droite

$$y=\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}-1$$

est asymptote à la courbe.
Trouvons la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_1(\infty)$ que nous avons trouvé, nous permet de conclure que

$$x\cdot\arctan x\cdot e^{1/x} - \frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}+1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{4}-1}{x} \leq 0, \quad \text{si } x>0.$$

Par conséquent, la courbe est **en-dessous** de sa asymptote.

5. $y = e^{2/x}\sqrt{1+x^2}\arctan x$: Nous avons

$$\begin{aligned}
e^{2/x}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\arctan x &= e^{2/x}\cdot x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\arctan x\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\qquad\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\qquad\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+2+\frac{5}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \frac{\pi x}{2}+\pi-1+\frac{\frac{5\pi}{4}-2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la droite

$$y = \frac{\pi x}{2}+\pi-1$$

est asymptote à la courbe.

Trouvons la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Pour cela, notons que le $\mathbf{DL}_1(\infty)$ que nous avons trouvé, nous permet de conclure que

$$e^{2/x}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\arctan x \;-\; \frac{\pi x}{2}-\pi+1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{5\pi}{4}-2}{x} \;\geq\; 0,\quad \text{si } x>0.$$

Par conséquent, la courbe est **au-dessus** de sa asymptote.