15/2

II / Forces et état d'équilibre

Exo 1 :

1) $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

$MLT^{-2}L^2M^{-2} \Rightarrow M^{-1}L^3T^{-2}$

2) $F_{TL} = \dfrac{GM_TM_L}{d^2_{TL}}$ $\quad F_{SL} = \dfrac{GM_SM_L}{d^2_{SL}}$

$\dfrac{F_{SL}}{F_{TL}} = \dfrac{M_S\,d^2_{TL}}{M_T\,d^2_{SL}} \simeq 2,21 \Rightarrow F_{SL} > F_{TL}$

3) m —— d —— m

$F = \dfrac{Gm^2}{d^2} \Rightarrow m = \sqrt{\dfrac{Fd^2}{G}} = 1,2 \times 10^5\ kg$

Exo 2 :

1) $\vec{F}_{terre \to objet} = \dfrac{-GM_TM}{R_T^2}\ \vec{u}_{terre \to objet}$

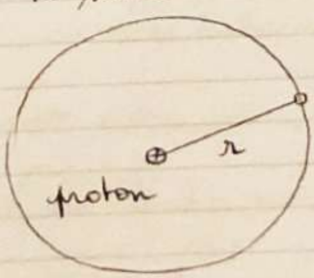
$\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{g} = -\dfrac{GM_T}{R_T^2}\ \vec{u}_{terre \to objet}$

$\|\vec{g}\| = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$

Si $m \to 2m$ et $R_T \to 2R_T \Rightarrow P' = 2m \times \dfrac{-GM_T}{(2R_T)^2} = \dfrac{P}{2}$

2) $g_{mars} = \dfrac{GM_{mars}}{R^2_{mars}} \Rightarrow M_{mars} = \dfrac{g_{mars}\,R^2_{mars}}{G} = 6,4 \times 10^{23}\ kg$

Exo 3 :



r atome hydrogène $= 0,53 \times 10^{-10}\ m$

$F_{gravitationnelle} = G\ \dfrac{\overbrace{m_p}^{proton} \times \overbrace{m_e}^{électron}}{r^2}$

$F_{électromagnétique} = \underbrace{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{cste h de Planck}} \times \dfrac{e^2}{r^2} \to q_1 \times q_2$

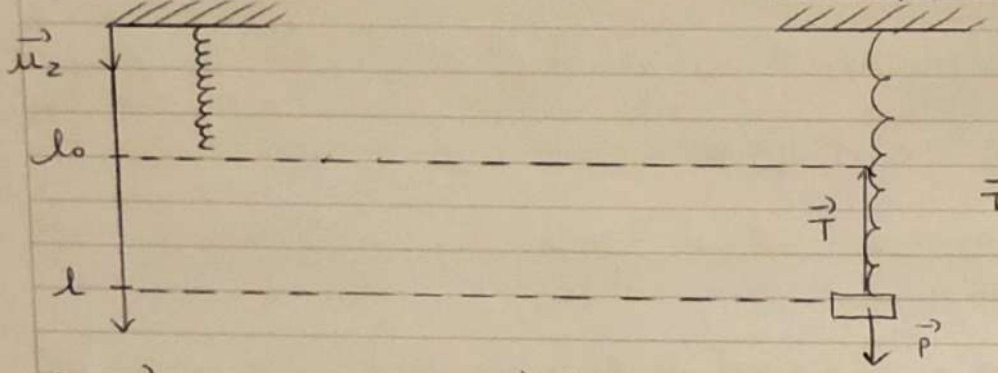
$\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{1}{g\,m_e\,m_p} = 2,23 \times 10^{39}$

MÉCA DU POINT TD

15/2

Exo 4:

1) 1) A vide: En équilibre:



$\vec{T} = -K(l - l_0)\,\vec{u}_z$

2) 2) $\vec{F} = -K(x_H - x - l_0)(-\vec{u}_x)$

$= K(\underbrace{x_H - x - l_0}_{\text{longueur ressort}})\,\vec{u}_x$

↳ longueur ressort

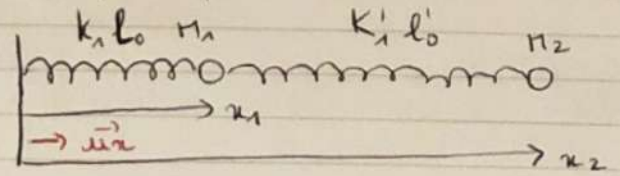
3) $\vec{F} = -K(x - x_H - l_0)\,\vec{u}_x$

4) $\vec{F} = -K(-z - l_0)(-\vec{u}_z)$

$= K(-z - l_0)\,\vec{u}_z$

5) $\vec{F} = -K(z - l_0)\,\vec{u}_z$

3) 6)



Forces exercées sur M_1 : M_2

* la force exercée par le ressort 1 sur M_1 : / M_2

$\vec{F} = -K(x_1 - l_0)\,\vec{u}_x$ $\vec{F} = 0$

* " " " " " " 2 sur M_1 : / M_2

$\vec{F}' = -K'(x_2 - x_1 - l'_0)(-\vec{u}_x)$ $\vec{F}' = -K'(x_2 - x_1 - l'_0)\,\vec{u}_x$

$= K'(x_2 - x_1 - l'_0)\,\vec{u}_x$

* $\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{F}'$ $\vec{F}_{tot} = \vec{F}'$

26/2

Exo 5 :

1) PFD appliqué à un point matériel en équilibre, dans un référentiel Galiléen R :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

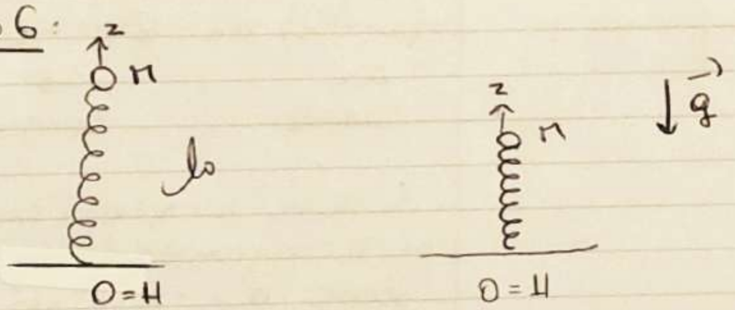
A l'équilibre, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

2) $m = cste$ $\quad \vec{p} = m\vec{v}$ $\Rightarrow \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \vec{0}$ donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$, v est cste

qté de mvt

$\Rightarrow v = cste \Rightarrow$ mvt rectiligne uniforme par rapport à R.

Exo 6 :



Bilan de forces exercées sur la masse M :

* le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}$
* la force exercée par le ressort sur M :

$$\vec{F} = -K(z - l_0)\,\vec{u_z}$$

* Deuxième loi de Newton : $\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$

A l'équilibre $\vec{a} = 0$ et $z = z_{éq}$

$\Rightarrow -Mg\,\vec{u_z} - K(z_{éq} - l_0)\,\vec{u_z} = \vec{0}$

$\Rightarrow -Mg - K(z_{éq} - l_0) = 0 \quad \Leftrightarrow z_{éq} - l_0 = -\frac{Mg}{K} \quad \Leftrightarrow l_0 - z_{éq} = \frac{Mg}{K}$

Exo 7 :

① Système étudié : Σ = { Personne + hamac }

② les forces exercées : le poids, la tension ① $\vec{T_1}$ et la tension ② $\vec{T_2}$

A l'équilibre $P + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$ $\quad \vec{P} = -mg\,\vec{u_y}$

26/2

$$\begin{cases} \vec{T_1} = -T_1 \cos\beta \, \vec{u_x} + T_1 \sin\beta \, \vec{u_y} \\ \vec{T_2} = T_2 \cos\alpha \, \vec{u_x} + T_2 \sin\alpha \, \vec{u_y} \end{cases}$$

<u>Projections sur (Ox) l'axe des abscisses :</u>

$-T_1 \cos\beta + T_2 \cos\alpha = 0$ ("tous les $\vec{u_x}$" du système)

<u>Rappels :</u>

29/2

$$\begin{cases} \vec{u_r} = \cos\theta \, \vec{u_x} + \sin\theta \, \vec{u_y} \\ \vec{u_\theta} = -\sin\theta \, \vec{u_x} + \cos\theta \, \vec{u_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ c en fct de p

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{u_r}} = \dot\theta \vec{u_\theta} \\ \dot{\vec{u_\theta}} = -\dot\theta \vec{u_r} \end{cases}$$

$\vec{OM} = r\vec{u_r}$

$\vec{v} = \dot r \vec{u_r} + r\dot\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{a} = (\dot r \vec{u_r} + r\dot\theta \vec{u_\theta})^{\cdot}$

$= \ddot r \vec{u_r} + \dot r \dot\theta \vec{u_\theta} + \dot r(\dot\theta \vec{u_\theta}) + r(\dot\theta \vec{u_\theta})^{\cdot}$

$= \ddot r \vec{u_r} + \dot r\dot\theta \vec{u_\theta} + \dot r\dot\theta \vec{u_\theta} + r(\ddot\theta \vec{u_\theta} - \dot\theta^2 \vec{u_r})$

$= \underbrace{(\ddot r - \dot\theta^2 r)}_{a_r} \vec{u_r} + \underbrace{(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)}_{a_\theta} \vec{u_\theta}$.

radiale tangentielle

Si MCU, $\dot r = \ddot r = 0$ (constante)
et $\dot\theta = \omega$ = constante
Donc $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u_r}$

<u>Rappels</u> exo 3 (vinyles)

2) $\omega = \frac{2\pi \times nb_t}{T}$ (nb_t : nb tours ; T : 1 min) $= \frac{33,3 \times 2\pi}{60} = 3,49 \text{ rad.s}^{-1}$

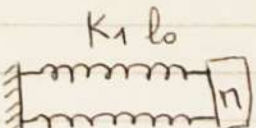
3) $\omega = 2\pi f = f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,56 \text{ Hz}$

$\omega = 2\pi \times \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega} = T$. $T = \frac{1}{f} = 1,8 \text{ s}$

4) MC donc $v = r\omega$ ⇒ donc la vitesse dépend de la position du pt

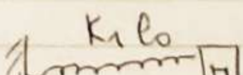
<u>Exo DS ressorts :</u>

K_1 l_0



K_2 l_0

K_1 l_0



$K(K_1, K_2) = ?$

$\vec{F_1} = -K_1 x \vec{u_x}$

$\vec{F_2} = -K_2 x \vec{u_x}$ $\vec{F_{tot}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -(K_1+K_2)x\vec{u_x}$ $\vec{F} = \vec{F_{tot}}$

$K = K_1 + K_2$

MÉCA DU POINT TD

6/3

Exo 7

2) A l'équilibre, la somme des forces extérieures exercées sur le système Σ ($\Sigma = \{$ personne + hamac $\}$) est nulle :

$$\vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0_y}$$

$$\vec{T_1} = T_1(-\cos\beta\, \vec{u_x} + \sin\beta\, \vec{u_y})$$

$$\vec{T_2} = T_2(\cos\alpha\, \vec{u_x} + \sin\alpha\, \vec{u_y})$$

$$\vec{P} = -mg\, \vec{u_y}$$

Projections sur :

- Ox : $-T_1\cos\beta + T_2\cos\alpha = 0$ (1)

- Oy : $T_1\sin\beta + T_2\sin\alpha - mg = 0$ (2)

(1) $\rightarrow$ $\boxed{T_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_1}$

(2) $T_1\sin\beta + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_1 \sin\alpha = mg \iff T_1 =$ $\div \cos\beta$

$$\iff T_1\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta}\tan\alpha\right) = \frac{mg}{\cos\beta}$$

$$\iff T_1 = \frac{mg}{\tan\beta + \cos\beta\tan\alpha} = \frac{mg}{\cos\beta(\tan\alpha + \tan\beta)}$$

$$T_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} T_1 = \frac{1}{\tan\beta + \tan\alpha} \times \frac{mg}{\cos\beta} \times \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$T_2 = \frac{1}{\tan\beta + \tan\alpha} \times \frac{mg}{\cos\alpha}$$

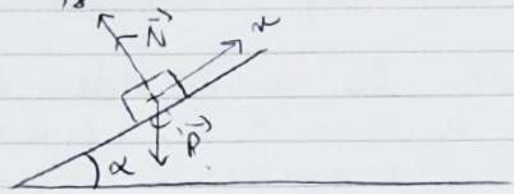
MÉCA DU POINT TD

MÉTHODE:

6/3

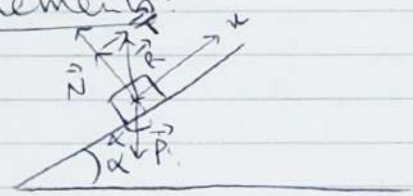
Exo 8

1)

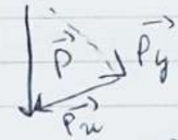


En l'absence de frottements : le poids $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{N}$.

2) Avec frottements :



$\vec{P} = \vec{P_x} + \vec{P_y}$ ✪



La réaction du plan incliné sur le bloc $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$
$\vec{N} \rightarrow$ normale et $\vec{T}$ = force de frottements.

$\longrightarrow x$ ds m̂ sens que $\vec{T}$: $\vec{R} = T\vec{u_x} + N\vec{u_y}$

✪ $\vec{P} = -mg \sin\alpha \, \vec{u_x} - mg \cos\alpha \, \vec{u_y}$

2ème Loi de Newton à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

$-mg \sin\alpha \, \vec{u_x} - mg \cos\alpha \, \vec{u_y} + T\vec{u_x} + N\vec{u_y} = \vec{0}$

Projection sur :

- $\vec{u_x}$: multiplier par $\vec{u_x}$: $-mg \sin\alpha - 0 + T + 0 = 0$
$(\vec{u_x})^2 = 1$ et $\vec{u_x} \times \vec{u_y} = 0$.

$T = mg \sin\alpha$

- $\vec{u_y}$: m̂ chose : $-mg \cos\alpha + N = 0 \Leftrightarrow N = mg \cos\alpha$

Condition de non-glissement du solide sur le plan incliné.
Loi de frottements sans glissements : $T \leq \mu N$

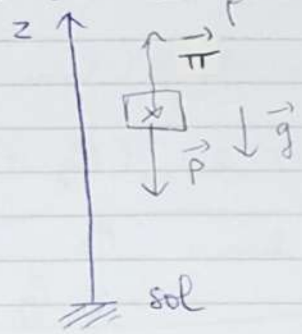
$\Leftrightarrow mg \sin\alpha \leq \mu mg \cos\alpha \underset{\div \cos\alpha}{\Leftrightarrow} \boxed{\tan\alpha \leq \mu}$

Tant que cette condition (α) est vérifiée, il y a équilibre : pas de glissement.

/3

Exo 9 :

1) Bilan de forces extérieures exercées sur le plongeur :



* le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$
* A l'équilibre. $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$

Projection sur (oz) $\Pi - mg = 0$

$\Pi = \rho_{eau} V_{im}\, g \Rightarrow \rho_e V_{im} \cancel{g} = m\cancel{g}$ $\boxed{V_{im} = \frac{m}{\rho_e}}$

volume immergé

$V_{avt} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h$

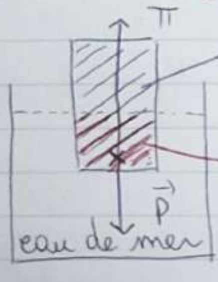
(1) $V_{après} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h + V_{im} = \pi \frac{d^2}{4} h + \frac{m}{\rho_e}$

Or $V_{après} = \frac{\pi d^2}{4}(h + \Delta h)$ = volume cylindre de hauteur $h + \Delta h$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow \frac{\pi d^2}{4}(\cancel{h} + \Delta h) = \cancel{\frac{\pi d^2 h}{4}} + \frac{m}{\rho_e}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{m}{\rho_e} \times \frac{4}{\pi d^2}} = 2,2 \text{ mm}$

2)



A l'équilibre, $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$

m la masse de l'iceberg : $m\cancel{g} - \rho_{mer} \times V_{im} \times \cancel{g} = 0 \Rightarrow V_{im} = \frac{m}{\rho_{er}}$

$V_{tot} = V = S\, h_{tot}$ où S est la surface de base de l'iceberg

or $m = \rho_g V = \rho_g S h_{tot}$

$\Rightarrow \rho_g S h_{tot} = V_{im} \rho_{mer} = h_{im} S \rho_{mer}$

$\Rightarrow h_{tot} = h_{im} + h_{visible}$

$\Rightarrow \rho_g \cancel{S} (h_{im} + h_{visible}) = h_{im} \cancel{S} \rho_{mer}$

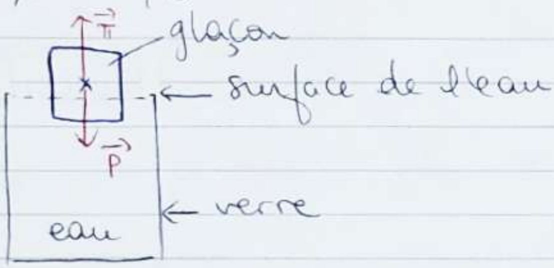
$\Rightarrow h_{im} (\rho_g - \rho_{mer}) = - \rho_g h_{visible}$

$$\boxed{h_{im} = \frac{\rho_g}{\rho_{mer} - \rho_g} \times h_{visible}}$$

2) $h_e = 30\,m = h_{visible}$

$h_{im} = \frac{0,917}{1,025 - 0,917} \times 30 = 255\,m$

3)



a) on néglige $\vec{\Pi}_{air}$ = poussée d'Archimède dûe à l'air.

A l'équilibre : $\vec{\Pi}_{eau} + \vec{P} = \vec{0}$ $\Rightarrow m \cancel{g} - \rho_{eau} V_{im} \cancel{g} = 0$

$\boxed{m_g = \rho_{eau} V_{im}}$ (1)

Conservation de la masse : $m_g = m_\ell = \rho_\ell \times V_\ell$ ℓ = liquide

$\boxed{\rho_\ell = \rho_{eau}}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $V_{im} = V_\ell$ $\Rightarrow$ le verre ne déborde pas

b) On ne néglige pas $\vec{\Pi}_{air}$. A l'équilibre $\vec{P} + \vec{\Pi}_{eau} + \vec{\Pi}_{air} = \vec{0}$

$\boxed{mg = \rho_\ell V_{im} + \rho_{air} V_{émergé}}$ (1)'

(2) = (1)' $\Rightarrow \rho_\ell V_\ell = \rho_\ell V_{im} + \rho_{air} V_{ém}$

$\Rightarrow V_\ell = V_{im} + \frac{\rho_{air}}{\rho_\ell} \times V_{em} > V_{im}$ $\rightarrow$ ça déborde !

MECA DU POINT TD

18/3

TD 3 - Exo 1. Exo au DS.

$\downarrow \vec{g}$

1) 2^e loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projections sur (Ox) et (Oz) $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x} = cste \\ \dot{z} = -gt + cste \end{cases}$

à $t=0$ $\begin{cases} v_0 \cos\alpha = cste \\ v_0 \sin\alpha = cste \end{cases}$ ← loi des vitesses

$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t \end{cases}}$ éq horaires $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$\boxed{z = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)}$ éq trajectoire

2) Au point S (sommet) : $\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow$

$-g\frac{x}{(v_0\cos\alpha)^2} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{x_S = \frac{v_0^2}{g} \times \sin\alpha \times \cos\alpha}$

$\Rightarrow h = z(x_S) = ?$

$z = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$

$h = -\frac{g}{2}\left(\frac{v_0^2 \sin\alpha \cancel{\cos\alpha}}{g}\right)^2 \times \frac{1}{(v_0 \cancel{\cos\alpha})^2} + \frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\left(\frac{v_0^2 \sin\alpha \cancel{\cos\alpha}}{g}\right)$

$= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$ $\boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}}$

MÉCA DU POINT TD

18/3

L'accélération au point S vaut $\vec{a} = \vec{g}$.

3) <u>1ère méthode</u> : $d = 2x_S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

<u>2e méthode</u> : au point D : $z = 0$ → point de chute

$$\Rightarrow z = \frac{-g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)\underbrace{\left(\frac{-g}{2} \; \frac{x}{v_0^2 \cos\alpha} + \sin\alpha\right)}_{=0} = 0$$ or $x \neq 0$ et $\cos\alpha \neq 0$.

$$\Rightarrow x_0 = d = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} \rightarrow \boxed{d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

4) $* \Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{gd}{v_0^2} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)$

$\alpha' = \pi - \alpha$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{gd}{v_0^2}\right)}$$

5) $d = d_{max}$ si $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$