Séries - TD
Séries Numériques à termes positifs

Exercice 1 :

1. Déterminer en justifiant si les énoncés suivants sont vrais ou faux :
   (a) Si $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0
   (b) Si u_n tend vers 0 alors $\sum u_n$ converge.
   (c) Si S_n et R_n désignent la somme partielle et le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, on a
   $$\sum_{n\geq 0} u_n = S_n + R_n$$
   (d) Si R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$, R_n tend vers 0
2. A quelle condition sur $x \in \mathbf{C}$ la série $\sum x^n$ converge-t-elle ?
3. Déterminer en justifiant si les énoncés suivants sont vrais ou faux.
   (a) Si $u_n \leqslant v_n$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $u_n \sim v_n$ avec $u_n \leqslant 0$ pour tout entier n, et si $\sum v_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature de convergence.
4. Déterminer la convergence de la série
   $$\sum \left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$
5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{(n)}}$. Montrer que la suite $(ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
6. Déterminer un équivalent à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.
7. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $w_n = 2^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$. Montrer que $\sum w_n$ converge et calculer sa somme. On admettra que pour $x \in \mathbf{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 2 :

Etudier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

Exercice 3 :

Etudier la convergence des séries dont le terme général u_n est :

1. $\dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. $\sqrt{n^2+n}-n$
3. $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$
4. $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$
5. $\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$
6. $\dfrac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$
7. $\sin^3\left(\dfrac{1}{n}\right)$
8. $\dfrac{\ln(n^n)}{(\ln\, n)^n}$
9. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$
10. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
11. $\dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$
12. $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2n)^n}$
13. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
14. $\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, \quad a>0$
15. $\dfrac{n^2}{2^n+n}$
16. $n^{\frac{1}{n}}-(n+1)^{\frac{1}{n}}$
17. $u_n=\dfrac{\ln\, n}{2^n}$
18. $\dfrac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$

Exercice 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n = v_n - v_{n-1}.$$

Comparer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et celle de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels positifs, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
   (a) On suppose que $\sum v_n$ converge.
      - Si $u_n=o(v_n)$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

- Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

(b) On suppose que $\sum v_n$ siverge

- Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$.
- Si $u_n \sim v_n$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   (a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. On note γ (appelée constante d'Euler) sa limite.

   (b) Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

   (c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$, puis, un équivalent de t_n.

Exercice 6 :
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}.$$

Lorsque la série converge, calculer sa somme.

Exercice 7 : Série de Bertrand
Soit α et β deux réels. On étudie la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Cette série s'appelle la série de Bertrand.

1. Etudier le cas $\alpha > 1$. Indication : Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^\gamma}$, avec $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
2. Etudier le cas $\alpha < 1$. Indication : Calculer la limite de nu_n.
3. On étudie maintenant le cas $\alpha = 1$.

   (a) Soit $f_\beta :]1, +\infty \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

   $$f_\beta(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$$

   Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que f_β soit décroissante sur $]n_0, +\infty]$.

   (b) On suppose $\beta = 1$. Montrer, par comparaison avec une intégrale, que la série diverge.

   (c) On suppose $\beta > 1$. Montrer, par comparaison avec une intégrale, que la série converge.

   (d) Étudier le cas $\beta < 1$.

Exercice : [Autonomie]

1. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs.
   (a) Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$ est convergente.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $w_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
   Montrer que : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.
2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} w_n$ trois séries à termes positifs convergentes.
   Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} z_n$ où pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$z_n = \sqrt{u_nv_n + u_nw_n + v_nw_n}.$$
   Indication : Développer $(u_n + v_n + w_n)^2$ et trouver une majoration de z_n.

Exercice : [Autonomie]

Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}.$$

1. Montrer que si $p = 0$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge grossièrement.
2. Montrer que si $p \geq 3$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. Etudier les cas $p = 1$ et $p = 2$.

Séries Numériques à termes quelconques

Exercice 9 :

Etudier la convergence des séries dont le terme général u_n est :

1. $\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{(-2)^n}{1+3^n}$
3. $\dfrac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}$
4. $\dfrac{\sin(n)}{1+\cos(n)+e^n}$
5. $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$
6. $\arctan(n\alpha)\sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$
8. $(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-1)$

Exercice 10 :

On considère la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

1. Pour $n \geq 1$, déterminer un encadrement de
$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$
En faisant varier n et en ajoutant des inégalités adéquates, déduire un encadrement de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$
2. Pour $\alpha < 1$, donner un équivalent de S_n au voisinage de $+\infty$.
3. Pour $\alpha > 1$, trouver un encadrement de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ et donner un équivanlent du reste $R_n = S - S_n$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 11 :

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,\ln(n)}$
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$[\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)] \sim \frac{1}{n\,\ln(n)}.$$
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\,\ln(k)}$.

Exercice 12 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.
En utilisant un développement limité à l'ordre 3 ; étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.
Remarquer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Quelle réflexion ce résultat vous inspire-t-il ?

2. Etudier la nature des séries de termes général :
   (a) $\exp\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1$
   (b) $\sin\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1$
   (c) $\exp\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - \dfrac{2n+1}{2n}$
   (d) $\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$

Exercice 13 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel L strictement positif.
3. Calculer L en utilisant le rapport $\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$ et la formule de Wallis :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. En déduire la formule de Stirling au voisinage de $+\infty$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$