

**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**  
**2<sup>e</sup> Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

**T.D. n° 1**  
le 11 septembre 2019

**Ex.1**

Etudier la convergence des suites numériques suivantes, de terme général :

a)

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

b)

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

c)

$$c_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

d)

$$d_n = \sqrt{n} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$$

**Ex.2**

a) Montrer que la suite de terme général :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

n'est pas une suite de Cauchy. En déduire sa nature.

b) Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \frac{2^n n!}{1.3.5 \dots (2n+1)}$$

est décroissante et convergente.

(Ne pas chercher à calculer la limite.)

**Ex.3**

Soit  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = a \sin(u_n) + b \\ u_0 \text{ donné} \end{array} \right\}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $u_0$  sont des réels et  $0 < a < 1$ .

1) Montrer que :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq a^n |u_1 - u_0|$$

- 2) En déduire une majoration de :  
 $|u_{n+p} - u_n|$  avec  $p \in \mathbb{N}$ ,  
 et la nature de la suite  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 3) Quelle est la valeur de la limite de la suite  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dans le cas  $a = 1$   
 et  $b = 0$ ?

**Ex.4**

(Notation par la suite :  $\mathcal{V}(x_0) \equiv$  Voisinage de  $x_0$ )

- a) Comparer au  $\mathcal{V}(0)$  les fonctions :

$$f(x) = \cos x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x$$

- b) Trouver un équivalent de :

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ au } \mathcal{V}(0) \text{ et } \mathcal{V}(1).$$

- c) Comparer au  $\mathcal{V}(\infty)$  les fonctions :

$$h_1(x) = x^{\ln(x)} \text{ et } h_2(x) = (\ln(x))^x$$

**Ex.5**

Trouver un équivalent des fonctions suivantes au  $\mathcal{V}(\infty)$  :

- a)

$$f(x) = \sqrt{x^3 + x^{5/2}} - x^{3/2}$$

- b)

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}$$

**Ex.6**

Calculer les limites :

- a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3(x) + x - 4(\cos(x) - 1)}{3x^2 + e^x - 1}$$

- b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{e^x - \cosh(x)}$$

- c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(x)(e^{x^2} - 1)}{\cos(x)(\cosh(x) - 1) \ln(1 + 2016x)}$$

**Ex.7**

- a) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

- b) Résoudre :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$