CY Tech

TD Analyse

Réels.

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ? des irrationnels ?

- $1/3$
- $1/15$
- $1/25$
- $1/125$
- $0,\overline{3}$
- $\sqrt{2}$
- $0.1234567891234567\ldots$

On rappele que un nombre rationnel r est dit **décimal**, si on peut l'écrire sous la forme

$$r = \frac{p}{10^n}, \quad p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

En d'autre termes, un nombre décimale est un nombre réel qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exercice 1

Le résultant suivant donne une caractérisation des nombres rationnels.

Proposition

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimal périodique ou finie.

Solution : On a :

- $1/3 = 0,\overline{3} \implies 1/3$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $1/15 = 0,0\overline{6} \implies 1/15$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $1/25 = \frac{4}{10^2} = 0.04 \implies 1/25$ est un nombre **rationnel** d'écriture décimale finie.
- $1/125 = \frac{8}{10^3} = 0.008 \implies 1/125$ est un nombre **rationnel** d'écriture décimale finie.

Exercice 1

- $0,\overline{3}$: $\implies$ $1/3$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $\sqrt{2}$: est un nombre **Irrationnel.**
- $0,\overline{123456789}$: est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.

Exercice 2

Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3,\overline{14}; \qquad 0,\overline{9}; \qquad 3,14\overline{9};$$

Première Méthode : On commence par rappeler la valeur de la somme géométrique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Maintenant, si $0 \leq a < 1$, l'égalité précédente nous permet de déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Notation : Pour tout $0 \leq a < 1$, nous allons écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Exercice 2

$$3,\overline{14} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
3.\overline{14} &= 3 + \frac{14}{100} + \frac{14}{100^2} + \frac{14}{100^3} + \cdots \\
&= 3 + \frac{14}{100} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k \\
&= 3 + \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= 3 + \frac{14}{100} \cdot \frac{100}{99} \\
&= 3 + \frac{14}{99} = \frac{311}{99}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$3,14\overline{9} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
3.14\overline{9} &= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \cdot \frac{10}{9} \\
&= \frac{314}{100} + \frac{1}{100} = \frac{315}{100}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Autre Méthode :

$$r = 3,14\overline{9} \overset{?}{=} \frac{p}{q}.$$

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100r = 314,\overline{9}. \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie par 10 pour décaler de 1 chiffre :

$$100 \times 10r = 3149,\overline{9} \tag{2}$$

Les parties après la virgule des lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

$$100 \times 10r - 100r = 3149 - 314.$$

Donc $900r = 2835$ et

$$r = \frac{2835}{900} = \frac{315}{100}.$$

Exercice 2

Autre Méthode :

$$r = 3,\overline{14} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence immediatement après la virgule, donc on laisse r tel quel :

$$r = 3,\overline{14}. \tag{3}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie par 100 pour décaler de 2 chiffres :

$$100 \times r = 314,\overline{14}. \tag{4}$$

Les parties après la virgule des lignes (3) et (4) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (4)-(3) alors les parties décimales s'annulent :

$$100 \times r - r = 314 - 3 = 311.$$

Donc $99r = 311$ et

$$r = \frac{311}{99}.$$

À faire chez soi - Exercice 2

$$0,\overline{9} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
0.\overline{9} &= 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\
&= 0 + \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k \\
&= 0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= 0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} \\
&= 0 + \frac{9}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Montrer que

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

est irrationnel.

Avant de donner la preuve rappelons quelque propriétés du logarithme naturel. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour $p \in \mathbb{R}$, $\ln(a^p) = p \ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\exp(\ln(a)) = a$.

Exercice 3

Preuve : Nous allons montrer la proposition en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est rationnel et essayons d'arriver à une contradiction. Autrement dit, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q} \quad &\Longleftrightarrow \quad p \ln 2 = q \ln 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln 2^p = \ln 3^q \\ &\Longleftrightarrow \quad \exp(\ln 2^p) = \exp(\ln 3^q) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^p = 3^q.\end{aligned}$$

Contradiction ! Par conséquent $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors
$$r + x \notin \mathbb{Q}$$
et si $r \neq 0$ alors
$$r \cdot x \notin \mathbb{Q}.$$
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

La somme et le produit d'un nombre rationnel (non-nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.

Rappelons que :

- La somme de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$
- Le produit de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$

Nous allons montrer la proposition en raisonnant par l'absurde.

Pour aller plus loin - Exercice 4

Solution : Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

- Il nous faut montrer que
$$r + x \notin \mathbb{Q}.$$
Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $r + x \in \mathbb{Q}$. Alors on a
$$x = \underbrace{\underbrace{(x+r)}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r}_{\in\mathbb{Q}}}_{\in\mathbb{Q}}.$$
Contradiction ! Par conséquent $r + x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r + x$ est irrationnel.
- Il nous faut montrer que
$$r \cdot x \notin \mathbb{Q}.$$
Raisonnons par l'absurde et supposons $r \cdot x \in \mathbb{Q}$. Alors on a
$$x = \underbrace{\underbrace{(r \cdot x)}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r}}_{\in\mathbb{Q}}}_{\in\mathbb{Q}}.$$
Contradiction ! Par conséquent $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r \cdot x$ est irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Solution : Soient r et r' deux rationnels avec $r < r'$. Définissons

$$i = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r).$$

Puisque $0 < \sqrt{2}/2 < 1$ on déduit

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) < (r'-r) \quad \Longrightarrow \quad r < r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r) < r + (r'-r) = r'.$$

Donc $r < i < r'$. Maintenant

$$\underbrace{\underbrace{r}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r).}_{\notin\mathbb{Q}}}_{\notin\mathbb{Q}}$$

Par conséquent, i est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Exercice 5

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A ;
2. m est un minorant de A ;
3. P n'est pas un majorant de A ;
4. A est majoré ;
5. A n'est pas minoré ;
6. A est borné ;
7. A n'est pas borné.

Exercice 5

Solution :

1. 10 est un majorant de A : $\forall x \in A,\ x \leq 10.$
2. m est un minorant de A : $\forall x \in A,\ x \geq m.$
3. P n'est pas un majorant de A : $\exists x \in A,\ x > P.$
4. A est majoré : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M.$
5. A n'est pas minoré : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x < m.$
6. A est borné : $\exists M \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq x \leq M.$
7. A n'est pas borné : $\forall M \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x < m \text{ ou } M < x.$

Exercice 6

Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ : \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'il existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Solution : Par définition

$$x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2.$$

Donc pour montrer que I est la réunion de deux intervalles il suffit de résoudre l'inéquation

$$-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2.$$

Exercice 6

Commençons par résoudre l'inégalité à droite. On a

$$x + \frac{1}{2x} \leq 2 \iff x + \frac{1}{2x} - 2 \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 4x + 1}{2x} \leq 0.$$

En faisant un tableau de signe on obtient

Valeurs de x	$-\infty$		0		1-$\sqrt{2}/2$		1+$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$2x^2 - 4x + 1$		$+$		$+$		-		$+$	
$2x$		-		$+$		$+$		$+$	
$\frac{2x^2-4x+1}{2x}$		-		$+$		-		$+$	

L'inégalité à droite a donc par ensemble solution, l'ensemble

$$S_d = \left]-\infty, 0\right[\ \cup \ \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Exercice 6

Pour résoudre l'inégalité à gauche on écrit

$$x + \frac{1}{2x} > -2 \iff x + \frac{1}{2x} + 2 > 0 \iff \frac{2x^2+4x+1}{2x} > 0$$

En faisant un tableau de signe on obtient

Valeurs de x	$-\infty$		-1-$\sqrt{2}/2$		-1+$\sqrt{2}/2$		0		$+\infty$
$2x^2+4x+1$		+		-		+		+	
$2x$		-		-		-		+	
$\frac{2x^2+4x+1}{2x}$		-		+		-		+	

L'inégalité à gauche a donc par ensemble solution, l'ensemble

$$S_g = \left]-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[.$$

Exercice 6

Par conséquent, la solution de l'inequation $-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2$ est donnée par

$$I = S_g \cap S_d = \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Avec cette description de I on conclut :

- l'ensemble I ne possède pas de minimum.
- le maximum de I est égal à $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- sa borne inférieure est égale à $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- sa borne supérieure est égale au maximum, c'est à dire $\sup(I) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- les minorants sont tous les réels inférieur ou égal à la borne inférieure. Autrement dit

$$x \text{ est un minorant de } I \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- les majorants sont tous les réels supérieur ou égal au maximum. Autrement dit

$$x \text{ est un majorant de } I \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? Minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure et leur borne supérieure. Ont-t-ils un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2 \right\}$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ : \ p \in \mathbb{N}^*, \ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Solution : Commençons avec $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}$. On a

$$x \in A \iff x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \iff x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[.$$

Donc

$$A = \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[.$$

Ainsi

$$\sup(A) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf(A) = -\sqrt{2}.$$

Finalement, comme $\pm\sqrt{2} \notin A$, on conclut que l'ensemble A n'admet ni minimum, ni maximum.

Exercice 7

Étudions

$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Essayons de minorer et majorer l'ensemble B. Pour cela, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad 1 < 1 + \frac{1}{n}.$$

De même

$$1 \leq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

Exercice 7

L'inégalité $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ nous permet de conclure :

- L'ensemble B est majoré par tout réel supérieur ou égal à 2. De plus comme
$$2 = 1 + \frac{1}{1} \in I,$$
on conclut
$$\max(B) = 2.$$
On en déduit immédiatement :
$$\sup(B) = 2.$$
- L'ensemble B est minoré par tout réel inférieur ou égal à 1. Notons de plus que
$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} \ = \ 1.$$
Nous avons donc un candidat « naturel » pour la borne inférieur, à savoir : 1. Montrons que
$$\inf(B) = 1.$$

Exercice 7

On doit pour cela montrer :

$$\begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ 1 \text{ est le plus grand des minorants de } B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ \forall m > 1,\ m \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ \forall m > 1,\ \exists x \in B,\ x < m \end{cases}$$

On sait déjà que 1 est un minorant. Montrons que :

$$\forall m > 1,\ \exists x \in B,\ x < m.$$

Soit $m > 1$, on doit montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = 1 + \frac{1}{n}\ <\ m.$$

Cela revient à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n}\ <\ m - 1 \quad \iff \quad \frac{1}{m-1} < n.$$

Exercice 7

Maintenant, comme $\mathbb{R}$ n'est pas majoré, on est sûr de pouvoir trouver un entier n, vérifiant

$$\frac{1}{m-1} < n$$

Ainsi, si nous posons

$$x = 1 + \frac{1}{n},$$

on aura

$$x \in B \quad \text{et} \quad x \ < \ m.$$

L'entier m ne peut donc pas être un minorant de B. Donc

$$\inf(B) = 1.$$

Finalement, comme $1 \notin B$, on conclut que l'ensemble B n'admet pas de minimum.

Exercice 7

Méthode 2 : par l'absurde.

Puisque 1 est un minorant de B, on conclut d'après la définition de la borne inferieur que

$$1 \leq \inf(B).$$

Montrons que $1 = \inf(B)$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $1 \neq \inf(B)$, c'est-à-dire, supposons

$$1 < \inf(B)$$

et essayons d'arriver à une contradiction. Soit

$$n = E\left(\frac{1}{\inf(B) - 1}\right) + 1$$

Alors

$$\frac{1}{\inf(B) - 1} < n \quad \Longrightarrow \quad \inf(B) > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mais $1 + \frac{1}{n} \in B$. **Contradiction !** Donc $1 = \inf(B)$.

Méthode 3 : à l'aide de la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \in B.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$a_n \geq \inf(B).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$1 = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(B) = \inf(B).$$

Or, on sait que $1 \leq \inf(B)$. Par conséquent

$$\inf(B) = 1.$$

Exercice 7

Étudions

$$C = \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ : \ p \in \mathbb{N}^*, \ q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on a

$$0 < \frac{1}{p} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{q} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{p} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq -\frac{1}{q} < 0$$

Donc

$$-1 < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < 1.$$

Ce qui montre que C est majoré par tout réel supérieur ou égal à 1 et minoré par tout réel inférieur ou égal à -1. Montrons que

$$-1 = \inf(C) \quad \text{et} \quad 1 = \sup(C).$$

Exercice 7

Montrons que

$$-1 = \inf(C).$$

Solution : En prenant $q = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{p} - 1 \in C.$$

Ainsi

$$\frac{1}{p} - 1 \geq \inf(C)$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$-1 = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} - 1 \geq \lim_{p \to +\infty} \inf(C) = \inf(C).$$

Or, on sait que $-1 \leq \inf(C)$. Par conséquent

$$\inf(C) = -1.$$

Comme $-1 \notin C$, on conclut que l'ensemble C n'admet pas de minimum.

Exercice 7

Montrons que

$$1 = \sup(C).$$

Solution : En prenant $p = 1$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1 - \frac{1}{q} \in C.$$

Ainsi

$$1 - \frac{1}{q} \leq \sup(C)$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$1 = \lim_{q \to +\infty} 1 - \frac{1}{q} \leq \lim_{q \to +\infty} \sup(C) = \sup(C).$$

Or, on sait que $1 \geq \sup(C)$. Par conséquent

$$\sup(C) = 1.$$

Comme $1 \notin C$, on conclut que l'ensemble C n'admet pas de maximum.

Exercice 8

1. Montrer que, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2},\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
admet une borne supérieure et inférieure que l'on déterminera.

Solution : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
Pour montrer l'inégalité a gauche, notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$mn > 0 \quad \text{et} \quad (m+n)^2 > 0.$$
Donc
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Exercice 8

Pour montrer celle de droite on écrit

$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{4(m+n)^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{4(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{4(m+n)^2} \geq 0.$$

D'où on conclut que

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Ainsi, A est un ensemble non vide, minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{4}$. Donc $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.

Exercice 8

Déterminons la borne supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \ : \ n \in \mathbb{N}^*, \ m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- **Borne supérieure :** Notons d'abord que pour $m = 1$ et $n = 1$ on a

$$\frac{1 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Donc $\frac{1}{4} \in A$. Ainsi

$$\frac{1}{4} \leq \sup(A).$$

Maintenant, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

on déduit, car $\sup(A)$ est le plus petit de majorants, que $\sup(A) \leq \frac{1}{4}$ d'où on conclut l'égalité

$$\sup(A) = \frac{1}{4}.$$

On aurait pu conclure plus rapidement en remarquant que $1/4 = \max(A)$, en effet $1/4$ est un majorant de A qui appartient à A. Donc

$$\sup(A) = \max(A) = 1/4.$$

Exercice 8

- **Borne inférieure :** D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Ainsi 0 définit un minorant de A. Montrons que

$$0 = \inf(A).$$

On doit pour cela montrer :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ est un minorant de } A \\ 0 \text{ est le plus grand des minorants de } A \end{array}\right. \\
\iff \quad &\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ est un minorant de } A \\ \forall a > 0,\ a \text{ n'est pas un minorant de } A \end{array}\right. \\
\iff \quad &\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ est un minorant de } A \\ \forall a > 0,\ \exists x \in A,\ x < a \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On sait déjà que 0 est un minorant. Montrons que :

$$\forall a > 0,\ \exists x \in A,\ x < a.$$

Soit $a > 0$, on doit montrer qu'il existe un couple $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = \frac{mn}{(m+n)^2} \ < \ a.$$

Exercice 8

On peut simplifier le travail en imposant $m = 1$, et en cherchant n tel que

$$\frac{n}{(1+n)^2} < a$$

Cela revient à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2}{n} > \frac{1}{a} \quad &\iff \quad \frac{n^2+2n+1}{n} > \frac{1}{a} \\ &\iff \quad n+2+\frac{1}{n} > \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{5}$$

Or $n+2+\frac{1}{n} > n+2$. Par conséquent, pour vérifier l'inégalité (5), il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n+2 > \frac{1}{a} \quad \implies \quad \frac{1}{a} - 2 < n.$$

Maintenant, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on est sûr de pouvoir trouver un entier n, vérifiant

$$\frac{1}{a} - 2 < n.$$

Exercice 8

Ainsi, il existe

$$x \in A,\ x = \frac{n}{(n+1)^2} \ < \ a.$$

Le nombre a ne peut donc pas être un minorant de A. Donc

$$\inf(A) = 0.$$

Exercice 8

Méthode 2 : par l'absurde. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Ainsi 0 définit un minorant de A et on obtient d'après la definition de la borne inferieur que

$$0 \leq \inf(A).$$

Montrons que $0 = \inf(A)$ en raissonant par la absurde. Supposons donc que

$$0 < \inf(A)$$

et essayons d'arriver à une contradiction. Soit

$$n = E\left(\frac{1}{\inf(A)}\right) + 1$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(A)} < n \quad &\Longrightarrow \quad \inf(A) > \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow \quad \inf(A) > \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} > \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n \cdot 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{n \cdot 1}{(n+1)^2} \in A$. Contradiction ! Donc $0 = \inf(A)$.

Exercice 8

Méthode 3 : à l'aide de la limite.

En prenant $m = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} \in A.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$a_n \geq \inf(A).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$0 = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(A) = \inf(A).$$

Or, on sait que $0 \leq \inf(A)$. Par conséquent

$$\inf(A) = 0.$$

Exercice 9

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait

$$x \leq y.$$

Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Solution : On a

$$x \leq y \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Comme A et B sont non vides, on déduit :

- n'importe quel élément de B est un majorant de A. Par conséquent, $\sup(A)$ existe.
- n'importe quel élément de A est un minorant de B. Par conséquent, $\inf(B)$ existe.

Maintenant, puisque

$$x \leq y \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

et $\sup(A)$ et le plus petit des majorants de A, on déduit

$$\sup(A) \leq y, \quad \forall y \in B.$$

Exercice 9

Ainsi $\sup(A)$ est un minorant de B, et comme $\inf(B)$ est le plus grand minorant de B, on conclut

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Exercice 10

1. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose
$$-A = \{-x \ : \ x \in A\}.$$
Montrer que $-A$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que
$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

2. Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On pose
$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$
Montrer que $A + B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad ; \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Exercice 10

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose

$$-A = \{-x \ : \ x \in A\}.$$

Montrer que $-A$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Solution : Puisque A et non vide, il existe $a \in A$. Ainsi $-a \in -A$, et donc $-A$ est non vide. Maintenant, comme A est bornée, il existe $m \in \mathbb{R}, \ M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$:

$$m \leq x \leq M.$$

Ceci implique qu'il existe $m \in \mathbb{R}, \ M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$:

$$-M \leq -x \leq -m.$$

Comme tous les éléments de $-A$ sont de la forme $-x$ avec $x \in A$ on conclut

$$\forall y \in -A, \ -M \leq y \leq -m.$$

Autrement dit $-A$ est Borné.

Exercice 10

Puisque A est minoré, A admet une borne inférieur $\inf(A)$. De même comme $-A$ est majoré, $-A$ admet une borne supérieur $\sup(-A)$. Montrons

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

On va le démontrer par double inégalité. Pour tout $x \in A$ on a

$$\inf(A) \leq x \quad \Longrightarrow \quad -x \leq -\inf(A).$$

On en déduit que $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$, cela entraine que

$$\sup(-A) \leq -\inf(A).$$

De même, pour tout $y \in -A$ on a

$$y \leq \sup(-A) \quad \Longrightarrow \quad -\sup(-A) \leq -y.$$

On en déduit que $-\sup(-A)$ est un minorant de A, cela entraine que

$$-\sup(-A) \leq \inf(A) \quad \Longrightarrow \quad \sup(-A) \geq -\inf(A).$$

Donc

$$\sup(-A) \geq -\inf(A) \quad \text{et} \quad \sup(-A) \leq -\inf(A).$$

Par conséquent

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Exercice 10

Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Montrer que $A + B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Solution : Puisque A et B sont non vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$. Ainsi

$$a + b \in A + B \quad \Longrightarrow \quad A + B \neq \emptyset.$$

Comme A et B sont bornées, il existe $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ et $m_2, M_2 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$ on a

$$m_1 \leq a \leq M_1 \quad \text{et} \quad m_2 \leq b \leq M_2.$$

Cela entraine que pour tous

$$a \in A, \ b \in B, \quad m_1 + m_2 \leq a + b \leq M_1 + M_2.$$

Par conséquent, $A + B$ est bornée. Ainsi, $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Exercice 10

Montrons

$$\sup(A+B) \;=\; \sup(A)+\sup(B)$$

Solution : On va le démontrer par double inégalité. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Alors

$$a \leq \sup(A) \quad \text{et} \quad b \leq \sup(B) \quad \Longrightarrow \quad a+b \leq \sup(A)+\sup(B).$$

Ainsi $A+B$ est majorée par $\sup(A)+\sup(B)$. On en déduit que

$$\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B).$$

Fixons à présent $b \in B$. Alors pour tout $a \in A$ on a

$$a+b \leq \sup(A+B) \quad \Longrightarrow \quad a = a+b-b \leq \sup(A+B)-b.$$

D'où on déduit que $\sup(A+B)-b$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, nous pouvons écrire

$$\sup(A) \leq \sup(A+B)-b.$$

Exercice 10

Comme l'inégalité

$$\sup(A) \leq \sup(A+B) - b.$$

est vraie pour tout $b \in B$ (on n'a mis aucune condition sur b au moment de le choisir) on conclut

$$\forall b \in B, \quad b \leq \sup(A+B) - \sup(A).$$

Ainsi B est majoré par $\sup(A+B) - \sup(A)$, et comme $\sup(B)$ est le plus petit des majorants de B, nous pouvons écrire

$$\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A) \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B).$$

Puisque

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B) \quad \text{et} \quad \sup(A) + \sup(B) \geq \sup(A+B)$$

on obtient

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 10

Montrons

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

Solution : On va le démontrer par double inégalité. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Alors

$$\inf(A) \leq a \quad \text{et} \quad \inf(B) \leq b \quad \Longrightarrow \quad \inf(A) + \inf(B) \leq a + b.$$

Ainsi $A + B$ est minoré par $\inf(A) + \inf(B)$. On en déduit que

$$\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B).$$

Fixons à présent $b \in B$. Alors pour tout $a \in A$ on a

$$\inf(A+B) \leq a + b \quad \Longrightarrow \quad \inf(A+B) - b \leq a + b - b = a.$$

D'où on déduit que $\inf(A+B) - b$ est un minorant de A. Puisque $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A, nous pouvons écrire

$$\inf(A+B) - b \leq \inf(A).$$

Exercice 10

Comme l'inégalité

$$\inf(A+B) - b \leq \inf(A).$$

est vraie pour tout $b \in B$ (on n'a mis auccune condition sur b au moment de le choisir) on conclut

$$\forall b \in B, \quad \inf(A+B) - \inf(A) \leq b.$$

Ainsi B est minoré par $\inf(A+B) - \inf(A)$, et comme $\inf(B)$ est le plus grand de minorants de B, nous pouvons écrire

$$\inf(A+B) - \inf(A) \leq \inf(B) \quad \Longrightarrow \quad \inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B).$$

Puisque

$$\inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B) \quad \text{et} \quad \inf(A+B) \geq \inf(A) + \inf(B)$$

on obtient

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B).$$

Exercice 11

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer les implications suivantes :

1. $A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
2. $A \subset B \Longrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$.
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
4. $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$.

Exercice 11

Montrons

$$A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$$

Solution : Par hypothèse A et B sont bornées, donc $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent. Puisque $A \subset B$, pour tout $x \in A$ nous avons $x \in B$, donc

$$x \leq \sup(B).$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\forall x \in A, \quad x \leq \sup(B).$$

Ainsi $\sup(B)$ est un majorant de A. Comme $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A, on en déduit que

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

Exercice 11

Montrons

$$A \subset B \Longrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$$

Solution : Par hypothèse A et B sont bornées, donc $\inf(A)$ et $\inf(B)$ existent. Puisque $A \subset B$, pour tout $x \in A$ nous avons $x \in B$, donc

$$\inf(B) \leq x.$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\forall x \in A, \quad \inf(B) \leq x.$$

Ainsi $\inf(B)$ est un minorant de A, et comme $\inf(A)$ est le plus grand minorant de A, on en déduit que

$$\inf(B) \leq \inf(A).$$

Exercice 11

Montrons

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

Solution : On va le démontrer par double inégalité. On commence par noter que

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad B \subset A \cup B.$$

L'exercice 11 question 1 nous permet donc d'écrire

$$\sup(A) \leq \sup(A \cup B) \quad \text{et} \quad \sup(B) \leq \sup(A \cup B).$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\max(\sup(A), \sup(B)) \leq \sup(A \cup B).$$

Maintenant, pour tout $x \in A \cup B$ on a :

- si $x \in A$ alors
$$x \leq \sup(A) \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$

- si $x \in B$ alors
$$x \leq \sup(B) \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in A \cup B, \quad x \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$

Exercice 11

Par conséquent, $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cup B$, d'où on déduit

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B)).$$

Puisque

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B)) \quad \text{et} \quad \sup(A \cup B) \geq \max(\sup(A), \sup(B))$$

on conclut

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)).$$

Exercice 11

Montrons

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$$

Solution : On a

$$A \cap B \subset A \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B.$$

L'exercice 11 question 2 nous permet donc d'écrire

$$\inf(A) \leq \inf(A \cap B) \quad \text{et} \quad \inf(B) \leq \inf(A \cap B)$$

D'où on conclut

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B).$$

À faire chez soi - Exercice 12

On considère l'ensemble des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Solution : Posons

$$B = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^{\times} \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, nous avons

$$1 \leq n \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1.$$

Donc, B est majoré par 1 et minoré par 0. De plus comme

$$1 = \frac{1}{1} \in B,$$

on conclut

$$\max(B) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sup(B) = 1.$$

À faire chez soi - Exercice 12

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on a

$$\frac{1}{n} \geq \inf(B).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(B) = \inf(B).$$

Or, on sait que $0 \leq \inf(B)$. Par conséquent

$$\inf(B) = 0.$$

Puisque 0 n'appartient pas à B, on conclut que B ne possède pas de plus petit élement.

À faire chez soi - Exercice 13

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note

$$B = \{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\}.$$

1. Justifier que B est majoré.
2. Prouver que

$$\sup(B) \ = \ \sup(A) - \inf(A).$$

Solution : Puisque A est non vide, il existe $a \in A$. Ainsi

$$|a-a| \ = \ 0 \ \in B,$$

et donc B est non vide. Comme A est bornée, on sait que A admet une borne supérieure et une borne inférieur. Ainsi, pour tout couple $x \in A$, $y \in A$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} & & \inf(A) \leq \ x \ \leq \sup(A) \\ \inf(A) \leq \ y \ \leq \sup(A) & \Longrightarrow & -\sup(A) \leq \ -y \ \leq -\inf(A) \\ & \Longrightarrow & \inf(A) - \sup(A) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A) \\ & \Longrightarrow & |x-y| \leq \sup(A) - \inf(A). \end{array}$$

À faire chez soi - Exercice 13

Par conséquent, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de B or $\sup(B)$ est le plus petit majorant de B, donc

$$\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A).$$

Fixons à présent $y \in A$. Alors pour tout $x \in A$ on a

$$\begin{aligned} |x - y| \leq \sup(B) \quad &\Longrightarrow \quad -\sup(B) \leq x - y \leq \sup(B) \\ &\Longrightarrow \quad y - \sup(B) \leq x \leq \sup(B) + y \end{aligned}$$

D'où on déduit que $\sup(B) + y$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, nous pouvons écrire

$$\sup(A) \leq \sup(B) + y.$$

Comme l'inégalité

$$\sup(A) \leq \sup(B) + y.$$

est vraie pour tout $y \in A$, on conclut

$$\forall y \in A, \ \sup(A) - \sup(B) \leq y.$$

À faire chez soi - Exercice 13

Ainsi A est minoré par $\sup(A+B) - \sup(A)$, et comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A, nous pouvons écrire

$$\sup(A) - \sup(B) \leq \inf(A) \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) - \inf(A) \leq \sup(B).$$

Puisque

$$\sup(B) \leq \sup(A) - \inf(A) \quad \text{et} \quad \sup(B) \geq \sup(A) - \inf(A)$$

on obtient

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A).$$

À faire chez soi - Exercice 14

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A \cdot B = \{x \cdot y \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

A-t-on toujours $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Solution : Soit $A = [-3, -1]$ et $B = [1, 4]$. Alors

$$\sup(A) = -1 \quad \text{et} \quad \sup(B) = 4$$

Donc

$$\sup(A) \cdot \sup(B) = -4.$$

Or nous avons

$$x \in [-3, -1] \quad \Longleftrightarrow \quad -3 \leq x \leq -1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq -x \leq 3$$

et

$$y \in [1, 4] \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 4$$

À faire chez soi - Exercice 14

On en déduit par multiplication des encadrement (positifs) que

$$1 \leq -xy \leq 12 \quad \Longleftrightarrow \quad -12 \leq xy \leq -1.$$

C'est-à-dire

$$A \cdot B = [-12, -1].$$

Ce qui implique que

$$\sup(A \cdot B) = -1 \neq -4 \;=\; \sup(A) \cdot \sup(B).$$

À faire chez soi - Exercice 14

Démontrons que

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$$

lorsque A et B sont des parties majorées non vides de $\mathbb{R}_+$.

Solution : Puisque A et B sont non vides, il existe $a \in A$ et $b \in B$. Ainsi

$$a \cdot b \in A \cdot B,$$

et donc $A \cdot B$ est non vide. Comme A et B sont majorées, il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ et $M_2 \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$ on a

$$0 \leq a \leq M_1 \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq M_2.$$

Cela entraine que pour tous

$$a \in A, \; b \in B, \quad a \cdot b \leq M_1 \cdot M_2.$$

Par conséquent, $A \cdot B$ est majorée. Ainsi $A \cdot B$ admet une borne supérieure.

À faire chez soi - Exercice 14

Montrons

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$$

Solution : On va le démontrer par double inégalité. Soit $a \in A$ et $b \in B$, alors

$$0 \leq a \leq \sup(A) \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq \sup(B) \quad \Longrightarrow \quad a \cdot b \leq \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Ainsi $A \cdot B$ est majorée par $\sup(A) \cdot \sup(B)$. On en déduit que

$$\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Maintenant, pour tout $a \in A$ et $b \in B$, nous avons

$$0 \leq a \cdot b \leq \sup(A \cdot B).$$

Si $b = 0$, alors

$$\sup(A) \cdot b = 0 \leq \sup(A \cdot B).$$

À faire chez soi - Exercice 14

Si $b > 0$, alors

$$\forall a \in A, \quad a \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{b}$$

et A est majorée par $\frac{\sup(A \cdot B)}{b}$. D'où on déduit que

$$\sup(A) \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{b} \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) \cdot b \leq \sup(A \cdot B).$$

Par conséquent, pour tout $b \in B$ on conclut

$$\sup(A) \cdot b \leq \sup(A \cdot B).$$

Si $\sup(A) = 0$, alors

$$\sup(A) \cdot \sup(B) = 0 \leq \sup(A \cdot B).$$

Si $\sup(A) > 0$, pour tout $b \in B$ on peut écrire

$$b \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup(A)}$$

et $\frac{\sup(A \cdot B)}{\sup(A)}$ est un majorant de B. D'où on déduit

$$\sup(B) \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup(A)} \quad \Longrightarrow \quad \sup(B) \cdot \sup(A) \leq \sup(A \cdot B).$$

À faire chez soi - Exercice 14

Dans tous le cas on obtient

$$\sup(B) \cdot \sup(A) \leq \sup(A \cdot B).$$

Finalement, puisque

$$\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B) \quad \text{et} \quad \sup(A \cdot B) \geq \sup(A) \cdot \sup(B)$$

on conclut

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

À faire chez soi - Exercice 15

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer les implications suivantes :

1. $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$,
2. $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$,

À faire chez soi - Exercice 15

Montrons

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)).$$

Solution : On va le démontrer par double inégalité. On commence par noter que

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad B \subset A \cup B.$$

L'exercice 11 question 2 nous permet donc d'écrire

$$\inf(A \cup B) \leq \inf(A) \quad \text{et} \quad \inf(A \cup B) \leq \inf(B).$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf(A), \inf(B)).$$

Maintenant, pour tout $x \in A \cup B$ on a :

- si $x \in A$ alors
$$\min(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A) \leq x.$$
- si $x \in B$ alors
$$\min(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(B) \leq x.$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in A \cup B, \quad \min(\inf(A), \inf(B)) \leq x.$$

À faire chez soi - Exercice 15

Par conséquent, $\min(\inf(A), \inf(B))$ est un minorant de $A \cup B$, d'où on déduit

$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B)$$

Puisque

$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B) \quad \text{et} \quad \min(\inf A, \inf B) \geq \inf(A \cup B)$$

on conclut

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)).$$

À faire chez soi - Exercice 15

Montrons

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

Solution : On a

$$A \cap B \subset A \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B.$$

L'exercice 11 question 1 nous permet donc d'écrire

$$\sup(A \cap B) \leq \sup(A) \quad \text{et} \quad \sup(A \cap B) \leq \sup(B).$$

D'où on conclut

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

Exercice 16

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Avant de montrer la propositon, rappelons la définition de la fonction partie entière. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit

$$E(x) := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Ceci implique que

$$x - 1 < E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Solution : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Nous devons montrer que

$$E(x) \leq E(y).$$

Par définition on a

$$E(x) \leq x.$$

Donc

$$E(x) \leq x \leq y.$$

Ainsi, $E(x)$ est un entier relatif inférieur ou égal à y.

Exercice 16

Comme $E(y)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à y on en deduit que

$$E(x) \leq E(y).$$

C'est-à-dire, la fonction partie entière est croissant.

Notons que la fonction partie entière n'est pas strictement croissante. En effet, pour $x = 1.5$ et $y = 1.9$ on a

$$x < y$$

mais

$$E(x) = 1 = E(y).$$

Exercice 17

Monter que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

Solution : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Commençons par montrer l'inégalité

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y)$$

Par définition

$$E(x) \leq x \quad \text{et} \quad E(y) \leq y.$$

Ce qui implique

$$E(x) + E(y) \leq x + y.$$

D'après l'exercice précédent, on sait que la fonction $E(\cdot)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$E(E(x) + E(y)) \leq E(x + y).$$

Or $E(x) + E(y) \in \mathbb{Z}$, donc

$$E(E(x) + E(y)) = E(x) + E(y).$$

Ainsi

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y).$$

Exercice 17

Pour montrer l'inégalité

$$E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1,$$

on fait noter :

- $E(x+y) \leq x + y$.
- $x < E(x) + 1$.
- $y < E(y) + 1$.

Ainsi

$$E(x+y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$$

Comme l'inégalité est stricte et $E(x+y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont des entiers, on peut affirmer que

$$E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

Exercice 17

Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$E(x) + E(-x).$$

Solution : On a :

- si $x \in \mathbb{Z}$, alors $E(x) = x$ et $E(-x) = -x$. Par conséquent
$$E(x) + E(-x) = 0.$$
- si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors
$$E(x) < x < E(x) + 1.$$
Donc
$$-E(x) - 1 < -x < -E(x).$$
Ceci implique que $-E(x) - 1$ est le plus grand entier relatif inferieur ou égal à $E(-x)$. Ce qui nous permet de conclure
$$E(-x) = -E(x) - 1.$$
Donc
$$E(x) + E(-x) = E(x) - E(x) - 1 = -1.$$

Exercice 17

Par conséquent

$$E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ que

$$E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

Solution : Par définition

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

En multipliant par n, on obtient

$$nE(x) \leq nx < nE(x) + n$$

et comme la fonction partie entiere est croissant on en déduit

$$nE(x) = E(nE(x)) \leq E(nx) < E(nE(x) + n) = nE(x) + n.$$

D'où on obtient en divisant par n

$$E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1.$$

Exercice 17

Ceci implique que $E(x)$ est le plus grand entier relatif inferieur ou égal à

$$\frac{E(nx)}{n}.$$

Par conséquent

$$E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

À faire chez soi - Exercice 18

Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x ?
5. Combien l'équation $x + 2y = n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?

À faire chez soi - Exercice 18

1. Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leq k \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq k \leq E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.

2. Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.
3. Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or

$$0 \leq 2k \leq x \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est le nombre des entiers k compris entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E\left(\frac{x}{2}\right)+1$ entiers pairs entre 0 et x. De même,

$$0 \leq 2k+1 \leq x \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x-1}{2}.$$

Il y a donc $E\left(\frac{x-1}{2}\right)+1$ entiers impairs entre 0 et x.

À faire chez soi - Exercice 18

4. Les multiples de 3 sont les entiers de la forme $3k$, $k \in \mathbb{N}$. Or

$$0 \leq 3k \leq x \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{3}.$$

Le nombre des multiples de 3 compris entre 0 et x est le nombre des entiers k compris entre 0 et $\frac{x}{3}$. D'après 2), il y a $E\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x + 2y = n \quad \Longleftrightarrow \quad x = n - 2y.$$

Donc, (x, y) est solution si et seulement si $y \in \mathbb{N}$ et $n - 2y \in \mathbb{N}$ ou encore si et seulement si $0 \leq 2y \leq n$. Il y a donc $E\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ couples solutions.

6. Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation

$$10x + 20y = 1000$$

qui s'écrit encore $x + 2y = 100$. D'après 5), il y a $E\left(\frac{100}{2}\right) + 1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

À faire chez soi - Exercice 19

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(5E(x) + 2) \cdot (3E(x) + 6) = 0$.
2. $(2E(x) + 1)^2 < 4$.

À faire chez soi - Exercice 19

$$(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0.$$

Solution : Nous avons

$$(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0 \iff E(x)=-\frac{2}{5} \text{ ou } E(x)=-\frac{6}{3}=-2.$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$ est un entier. Donc l'equation

$$E(x)=-\frac{2}{5}$$

n'a pas de solution. Ainsi

$$(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0 \iff E(x)=-2 \iff x\in[-2,-1[.$$

À faire chez soi - Exercice 19

$$(2E(x)+1)^2 < 4.$$

Solution : On cherche à résoudre $(2E(x)+1)^2 < 4$ ce qui est équivalent à résoudre

$$|2E(x)+1| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < 2E(x)+1 < 2.$$

On obtient

$$-\frac{3}{2} < E(x) < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq E(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Donc

$$S_2 \ = \ ]-1;1[.$$

Pour aller plus loin - Exercice 20

Nous voulons montrer que $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

1. Nous posons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx).$$

   Montrer que f est périodique de période $T = \frac{1}{n}$.
2. Calculer la valeur de $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$.
3. En déduire l'égalité souhaitée.

Pour aller plus loin - Exercice 20

Montrons que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx)$$

est périodique de période $\frac{1}{n}$. Nous devons montrer l'égalité

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Solution : On compute

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - E(nx+1).$$

Comme

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1 \implies E(nx) + 1 \leq nx + 1 < E(nx) + 2$$

on déduit $E(nx+1) = E(nx) + 1$. D'où on peut écrire

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k+1}{n}\right) - E(nx) - 1$$

Pour aller plus loin - Exercice 20

Maintenant, en utilisant le changement de indice $k+1=l$ on obtient

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k+1}{n}\right) - E(nx) - 1\\
&= \sum_{l=1}^{n} E\left(x+\frac{l}{n}\right) - E(nx) - 1\\
&= E(x+1) + \sum_{l=1}^{n-1} E\left(x+\frac{l}{n}\right) - E(nx) - 1\\
&= E(x) + 1 + \sum_{l=1}^{n-1} E\left(x+\frac{l}{n}\right) - E(nx) - 1\\
&= E\left(x+\frac{0}{n}\right) + \sum_{l=1}^{n-1} E\left(x+\frac{l}{n}\right) - E(nx)\\
&= \sum_{l=0}^{n-1} E\left(x+\frac{l}{n}\right) - E(nx) = f(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, f es une fonction périodique de période $\frac{1}{n}$.

Pour aller plus loin - Exercice 20

Calculer la valeur de $f(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$.

Solution : Si

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq nx < 1 \\ 0 \leq x + \frac{k}{n} < 1 \end{array}\right.$$

D'où on conclut que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$ et tout entier $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$E(nx) = 0 \quad \text{et} \quad E\left(x + \frac{k}{n}\right) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) = 0.$$

Finalement, par la périodicité de f, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour aller plus loin - Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Indication : Considérer le polynôme $f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2$.

Solution : Pour montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous allons étudier le discriminant du polynome

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2.$$

On compute

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_k b_k x + b_k^2 x^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k x\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 x^2\right).$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}_{c} + \underbrace{2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)}_{b} x + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}_{a} x^2 = c + bx + ax^2.$$

Pour aller plus loin - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2 \geq 0.$$

C'est-à-dire que f est un polynôme de degré 2 en x qui est positif ou nul pour tout x. Cela signifie que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Autrement dit on a

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \Delta \leq 0.$$

Par conséquent

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Pour aller plus loin - Inégalité de Cauchy-Schwarz

On conclut en prennant la racine carrée

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Pour aller plus loin - Exercice 22

Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose

$$\begin{array}{rclr} A & = & \frac{x+y}{2} & \textbf{(moyenne arithmétique)} \\ G & = & \sqrt{xy} & \textbf{(moyenne géométrique)} \\ H & = & \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})} & \textbf{(moyenne harmonique)}. \end{array}$$

Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$x \leq H \leq G \leq A \leq y.$$

Solution : Supposons $0 < x \leq y$. Montrons tout d'abord $A \leq y$. On a

$$\begin{aligned} y &= \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \\ &\geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2} = A. \end{aligned}$$

Donc $A \leq y$.

Pour aller plus loin - Exercice 22

Pour montrer que $G \ = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = A$, on compute

$$\begin{aligned} A - G = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} &= \frac{x}{2} - \sqrt{xy} + \frac{y}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $A - G \geq 0$ et donc

$$G \ = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = A.$$

Pour aller plus loin - Exercice 22

Montrons l'inégalité

$$H = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} \leq \sqrt{xy} = G.$$

Pour montrer ceci, on fait noter que d'après la preuve précédente, la moyenne géométrique des deux réels

$$\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}$$

est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} \leq \sqrt{xy}.$$

On a donc montré que $H \leq G$.

Montrons finalement l'inégalité

$$x \leq H = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}.$$

On commence par noter que la moyenne arithmétique de

$$\frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}$$

est compris entre $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{x}$. En effet, comme $0 < x \leq y$ on peut écrire

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Maintenant, en prenant le quotient

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x \leq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} \leq y.$$

On a donc montré que $x \leq H$. Par conséquent

$$x \leq H \leq G \leq A \leq y.$$

Pour aller plus loin - Exercice 22

Soit a un réel positif et $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'inégalité de Bernoulli suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \quad (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Solution : On fixe $a \in \mathbb{R}_+$ et on raisnone par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$(1+a)^1 = 1 + a \geq 1 \quad (\text{car } a \geq 0)$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Notons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie aussi.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a.$$

Pour aller plus loin - Exercice 22

On a

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \\ &\underbrace{\geq}_{\textbf{Hypothèse de Recurrence}} (1+na)\cdot(1+a) \\ &= 1+a+na+na^2 \\ &= 1+(n+1)a+na^2.\end{aligned}$$

Mais $n \in \mathbb{N}$, donc

$$na^2 \geq 0.$$

D'où on conclut

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout entier naturel n, l'inégalité

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Pour aller plus loin - Exercice 23

Tout entier naturel non nul n s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^p a_p,$$

où p est un entier naturel et les a_i sont des entiers éléments de

$$\{0, \ldots, 9\},$$

a_p étant non nul. **Déterminer p en fonction de n.**

Solution : On a

$$\begin{aligned} n =& a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^p a_p \\ =& 10^p \left(a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p \right). \end{aligned}$$

En prenant le logarithme décimal, on obtient

$$\begin{aligned} \log_{10}(n) &= \log_{10} \left(10^p \left(a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p \right) \right) \\ &= p + \log_{10} \left(a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p \right). \end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 23

Maintenant, puisque la fonction logarithme est croissante et

$$a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p < 10,$$

on déduit

$$\log_{10}\left(a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p\right) < \log_{10}(10) = 1.$$

Ce qui nous permet conclure

$$\begin{aligned} E(\log_{10}(n)) &= E\left(p + \log_{10}\left(a_0 10^{-p} + 10^{-p+1} a_1 + \ldots + a_p\right)\right) \\ &= p. \end{aligned}$$