CY Tech

TD Algèbre

Logique et Raisonnement.

Exercice 1.1

Soit P, Q deux propositions. Démontrer les équivalences suivantes en utilisant des tables de vérité.

1. $\text{non }(\text{non }(P)) \Leftrightarrow P$
2. $(P \text{ et } P) \Leftrightarrow P$
3. $(P \text{ ou } P) \Leftrightarrow P$
4. $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
5. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
6. $\text{non }(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non }(P) \text{ et non }(Q))$
7. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non }(P) \text{ ou } Q)$
8. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non }(P) \Leftrightarrow \text{non }(Q))$
9. $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non }(P) \Rightarrow Q)$

Exercice 1

Solution : Nous allons toutes les démontrer en remplissant une table de vérité.

P	Q	non (P)	non (non (P))	P et P	P ou P	P et Q	Q et P	P ou Q	Q ou P
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F	F

non $(P$ et $Q)$	non (P) ou non (Q)	non $(Q) \Rightarrow$ non (P)
F	F	V
V	V	F
V	V	V
V	V	V

non $(P$ ou $Q)$	non (P) et non (Q)	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$	non (P) ou Q
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V

non $(P \Rightarrow Q)$	P et non (Q)	non $(P) \Leftrightarrow$ non (Q)	non $(P) \Rightarrow Q$
F	F	V	V
V	V	F	V
F	F	F	V
F	F	V	F

Exercice 1.1

Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences suivantes en utilisant des tables de vérité.

1. $(P \text{ et } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ et } R)$
2. $(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)$
3. $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$
4. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$

Exercice 1.1

Solution : Nous allons toutes les démontrer en remplissant une table de vérité.

P	Q	R	Q et R	P et $(Q$ et $R)$	P et Q	$(P$ et $Q)$ et R	P ou $(Q$ ou $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F

P ou Q	$(P$ ou $Q)$ ou R	P ou $(Q$ et $R)$	P ou R
V	V	V	V
V	V	V	V
V	V	V	V
V	V	V	V
V	V	V	V
V	V	F	F
F	V	F	V
F	F	F	F

Exercice 1.1

Nous avons aussi :

P	Q	R	$(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$	$P \text{ et } R$	$Q \text{ ou } R$	$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 1.2

Soient P, Q et R deux propositions. Les propositions

$$\ll \ P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \ \gg \quad \text{et} \quad \ll \ (P \text{ ou } Q) \text{ et } R \ \gg$$

sont-elles équivalentes ?

Solution : Nous allons les comparer en remplissant une table de vérité.

P	Q	R	Q et R	P ou (Q et R)	P ou Q	(P ou Q) et R
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Comme les table de vérité sont différents, on conclut que les propositions

$$\ll \ P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \ \gg \quad \text{et} \quad \ll \ (P \text{ ou } Q) \text{ et } R \ \gg$$

ne sont pas équivalents.

Exercice 1.3

Sans utiliser de table de vérité (mais en utilisant les différentes propriétés déjà démontrées), démontrer que

$$\text{non } (P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad P \text{ et } (\text{non } Q)$$

et

$$P \text{ ou } Q \quad \Longleftrightarrow \quad (\text{non } (P) \;\Longrightarrow\; Q)\,.$$

Réponse : D'abord

$$\begin{aligned} \text{non } (P \Longrightarrow Q) \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{non } ((\text{non } P) \text{ ou } Q) \\ & \Longleftrightarrow \quad (\text{non } (\text{non } P)) \text{ et } (\text{non } Q) \\ & \Longleftrightarrow \quad P \text{ et } (\text{non } Q). \end{aligned}$$

En suite

$$\begin{aligned} (\text{non } P \Longrightarrow Q) \quad & \Longleftrightarrow \quad \text{non } (\text{non } P) \quad \text{ou} \quad Q \\ & \Longleftrightarrow \quad P \quad \text{ou} \quad Q. \end{aligned}$$

Exercice 1.4

Traduire en toutes lettres les sept propositions suivantes lorsque x désigne un individu, y un film et que $\mathscr{P}(x,y)$ est la proposition

$$\ll \text{L'individu } x \text{ a vu le film } y \gg.$$

On traduit :

- $\forall\ x$: Pour tout individu (= tous les individus.)
- $\forall\ y$: Pour tout film (= tous les films).
- $\exists\ x$: il existe (au moins) un individu.
- $\exists\ y$: il existe (au moins) un film.

1. $\forall x,\ \forall y,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Tous les individus ont vus tous les films.

2. $\exists x,\ \forall y,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Il existe un individu qui a vu tous les films.

Exercice 1.4

3. $\exists y,\ \forall x,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Il existe un film qui a été vu par tous les individus.

4. $\forall x,\ \exists y,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Tous les individus ont vu au moins un film.

5. $\exists x,\ \exists y,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Il existe un individu qui a vu au moins un film.

6. $\exists y,\ \exists x,\ \mathscr{P}(x,y)$

   Réponse : Il existe un film qui a été vu par au moins un individu.

Exercice 1.4

7. $\forall y, \ \exists x, \ \mathscr{P}(x, y)$

   Réponse : Tous les films ont été vus par au moins un individu.

Exercice 1.5

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer verbalement la signification des propositions suivantes :

1. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda.$

   Réponse : La fonction f est constante sur I, de valeur λ.

2. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$

   Réponse : Si la fonction f s'annule, alors elle s'annule uniquement en 0, c-à-d, la fonction f s'annule uniquement en 0, ou ne s'annule pas.

3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y.$

   Réponse : La fonction f est surjective, c'est-à-dire, toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ sont atteintes par f.

Exercice 1.5

4. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$

   Réponse : La fonction f est injective, c'est-à-dire, f prend au plus une fois chaque valeur.

5. $\forall \epsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

   Réponse : La fonction f est continue en $\mathbb{R}$.

6. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

   Réponse : La fonction f est uniformément continue.

Exercice 1.6

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est l'application nulle.

   Réponse : $\forall x \in I,\ f(x) = 0.$

2. f n'est pas l'application nulle.

   Réponse : $\exists x \in I,\ f(x) \neq 0.$

3. La fonction f s'annule.

   Réponse : $\exists x \in I, f(x) = 0.$

4. f ne s'annule pas sur I.

   Réponse : $\forall x \in I, f(x) \neq 0.$

Exercice 1.6

5. f est une fonction constante.

   Réponse : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, f(x) = \lambda$ ou
   $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y)$.

6. La fonction f n'est pas une fonction constante.

   Réponse : $\exists x \in I, \exists y \in I,\ f(x) \neq f(y)$.

7. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

   Réponse : $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.

8. La fonction f présente un minimum.

   Réponse : $\exists c \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geq f(c)$.

Exercice 1.6

9. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.

   Réponse : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) \geq M.$

10. f est une fonction affine.

   Réponse : $\exists m \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = mx + n.$

Exercice 1.7

Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geq 3.$

   Réponse : $x < 3.$

2. $0 < x \leq 2 \quad = \quad 0 < x \text{ et } x \leq 2.$

   Réponse : $x \leq 0 \;\text{ ou }\; x > 2.$

3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

   Réponse : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0.$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

   Réponse : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0.$

Exercice 1.7

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

   Réponse : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0.$

6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x.$

   Réponse : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leq x.$

7. P et (non Q).

   Réponse : (non P) ou Q qui est équivalent à $P \Longrightarrow Q$

8. P et (Q et R).

   Réponse : (non P) ou (non (Q) ou (non R)).

Exercice 1.7

9. P ou $(Q$ et $R)$.

   Réponse : $(\text{non } P)$ et $((\text{non } Q)$ ou $(\text{non } R))$

10. $(P$ et $Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)$.

    Réponse : Rappelons que

    $$(P \text{ et } Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S) \iff \text{non } (P \text{ et } Q) \text{ ou } (R \Longrightarrow S).$$

    Donc la négation de $(P$ et $Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)$ est :

    $$\begin{aligned} \text{non } \big(\text{non } (P \text{ et } Q) \text{ ou } (R \Longrightarrow S)\big) &\iff (P \text{ et } Q) \text{ et } (\text{non } (R \Longrightarrow S)) \\ &\iff (P \text{ et } Q) \text{ et non } (\text{non } R \text{ ou } S) \\ &\iff P \text{ et } Q \text{ et } (R \text{ et } (\text{non } S)) \\ &\iff P \text{ et } Q \text{ et } R \text{ et non } S. \end{aligned}$$

Exercice 1.7

11. Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.

    Réponse : Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.

12. Tout triangle rectangle possède un angle droit.

    Réponse : Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit.

13. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

    Réponse : Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval qui n'est pas noire.

Exercice 1.7

14. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$.

    Réponse : À l'aide de quantificateurs on peut écrire :

    $$\forall x,\ \exists y,\ \forall z,\quad z < x \implies z < x + 1.$$

    Donc la négation c'est : **Il existe un entier x, tel que pour tout entier y, il existe un entier z tel que l'on a à la fois $z < x$ et $z \geq x + 1$.**

15. $\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ \left(\left|x - \frac{5}{7}\right| < \alpha \Longrightarrow |5x - 7| < \epsilon\right).$

    Réponse : $\exists \epsilon > 0,\ \left(\forall\ \alpha > 0,\ \ \left|x - \frac{5}{7}\right| < \alpha \quad \text{et} \quad |5x - 7| \geq \epsilon\right).$

Exercice 1.8

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Indiquer la différence de sens entre les deux propositions proposées :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x).$

Réponse :

- Dans le premier cas, chaque réel possède au moins une image, donc la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- Dans le second tous les réels ont la même image (donc f est constante).

2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x).$

Réponse :

- Dans le premier cas, toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ sont atteintes par f (f est surjective sur $\mathbb{R}$) ;
- Dans le second cas, il existe un x tel que $f(x)$ prend toutes les valeurs réelles possibles (donc le graphe de f est une droite verticale).

Exercice 1.8

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$.

Réponse :

- Dans le premier cas, $f(x)$ est toujours plus petit qu'un réel.
- Dans le second cas, f est majorée par M.

A faire chez soi - Exercice 1.9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des propositions suivantes, donner graphiquement à main levée un exemple de fonction f **NE** la vérifiant **PAS** (contre-exemple).

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1 \text{ ou } f(x) \leq -1$

Solution : Une courbe qui répond aux trois questions est la courbe représentative de la fonction carré.

A faire chez soi - Exercice 1.10

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et

$$f : I \to \mathbb{R}$$

une fonction à valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0.$

   Réponse : $\exists x \in I, f(x) = 0.$

2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y.$

   Réponse : $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \neq y.$

3. $\exists M \in\ \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M.$

   Réponse : $\forall M \in\ \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ |f(x)| > M.$

4. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$

   Réponse : $\exists x \in I,\ \exists y \in I,\ f(x) = f(y)\ \text{ et }\ x \neq y.$

A faire chez soi - Exercice 1.11

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose

$$\Longrightarrow, \quad \Longleftarrow, \quad \Longleftrightarrow$$

1. $x \in \mathbb{R};\; x^2 = 4 \;\cdots\cdots\; x = 2.$

   Réponse : $x \in \mathbb{R};\; x^2 = 4 \Longleftarrow x = 2.$

2. $z \in \mathbb{C};\; z = \overline{z} \;\cdots\cdots\; z \in \mathbb{R}$

   Réponse : $z \in \mathbb{C};\; z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$

3. $x \in \mathbb{R};\; x = \pi \;\cdots\cdots\; e^{2ix} = 1.$

   Réponse : $x \in \mathbb{R};\; x = \pi \implies e^{2ix} = 1.$

A faire chez soi - Exercice 1.12

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 3$
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, x < \sqrt{x}$
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k \geq 100$

Solution :

1. Faux, en effet, $\exists x \in \mathbb{R},\ x > 2 \text{ et } x < 3$. Il suffit de prendre $x = 2.5$. Puisque la négation est vraie, la phrase est fausse.
2. Faux. On prend $x < 0 < y$, ainsi, $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$. Ce n'est vrai que si on impose à x et y d'être de même signe.
3. Vrai, il suffit de prendre $x = 0.25, \sqrt{x} = 0.5$
4. Vrai, il suffit de prendre $n = 100$.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Reprendre l'exercice 5 en donnant à chaque fois les négations en toutes lettres et avec les quantificateurs. On commence par noter que

$$\text{non } (\mathscr{P}(x,y)) = \ll \text{L'individu } x \text{ n'a pas vu le film } y \gg$$

Réponse :

1. $\exists x,\ \exists y$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Il existe un individu qui n'a pas vu au moins un film.

2. $\forall x,\ \exists y$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Pour tous les individus, il existe un film qui n'a pas été vu. On peut aussi dire : Pour chaque individu, il existe au moins un film qu'il n'a pas vu (personne n'a vu tous les films).

3. $\forall y, \exists x$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Pour tous les films, il existe un individu qui ne l'a pas vu (Aucun film n'a été vu par tout le monde).

4. $\exists x,\ \forall y$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Il existe un individu qui n'a vu aucun film.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

5. $\forall x, \forall y$, non$(\mathscr{P}(x,y))$: Aucun individu n'a vu de film.
6. $\forall y, \forall x$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Aucun film n'a été vu
7. $\exists y$, $\forall x$, non $(\mathscr{P}(x,y))$: Il existe un film qui n'a été vu par aucun individu.

Exercice 2.1

1. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
   Solution : Voir CM.

Exercice 2.1

Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel. C'est-à-dire, nous devons montrer : sot x un réel positif

$$\text{Si } x \text{ est un irrationnel} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \text{ est irrationnel.}$$

On rappelle que

$$x \text{ n'est pas irrationnel} \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est rationnel.}$$

Nous allons montrer la proposition en utilisant un raisonnement par contraposition.

Réponse : Nous devons donc montrer : soit x un réel positif alors

$$\sqrt{x} \text{ est rationnel} \quad \Longrightarrow \quad x \text{ est rationnel.}$$

Supposons $\sqrt{x}$ rationnel. Par définition d'un nombre rationnel, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\sqrt{x} = \frac{p}{q} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p^2}{q^2}$$

qui est le quotient de deux entiers naturels. Donc x est rationnel.

Exercice 2.2

Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^{\times}$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Réponse : Supposons que n est un **entier strictement positif** et que $n^2 + 1$ est le **carré d'un entier naturel** a. Trouvons une contradiction. Par hypothèse

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Puisque le produit de ces deux nombre est égal à 1, on conclut

$$a + n \quad \text{est different de } 0.$$

On a en plus

$$a \geq 0.$$

Par conséquent $a + n \in \mathbb{N}$ (car $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$) et

$$a + n \geq n > 0.$$

Exercice 2.2

Le nombre $a + n$ est donc un entier positif. Il s'ensuit, comme 1 est un entier positif, que

$$a - n \quad \text{est un entier positif.}$$

Maintenant, un produit d'entiers positifs est égal a 1 si et seulement si chacune d'entre eux est égal à 1. On en déduit

$$a - n = 1 \quad \text{et} \quad a + n = 1.$$

Par soustraction des deux égalités

$$2n = 0.$$

Puisque n est strictement positif, cela est une **contradiction**. D'où on conclut que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Exercice 2.3

Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme

$$a + b\sqrt{2}, \quad a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{Z},$$

alors les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Réponse : Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$r = a + b\sqrt{2} \quad a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons montrer que cette écriture est unique en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe deux couples distincts d'entiers (a, b) et (a', b') tels que

$$r = a + b\sqrt{2} \quad \text{et} \quad r = a' + b'\sqrt{2}$$

Essayons d'obtenir une contradiction. Pour cela on écrit

$$\begin{array}{rcl} 0 \; = \; r - r & = & (a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) \\ & = & (a - a') + (b - b')\sqrt{2}. \end{array}$$

Exercice 2.3

On a deux cas à étudier

- Si $b = b'$, alors $a = a'$ ce qui est en contradiction avec la hypothèse que les couples étaient distincts.
- Si $b \neq b'$, on déduit

$$0 = (a - a') + (b - b')\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{a' - a \ \in \mathbb{Z}}{b - b' \ \in \mathbb{Z}} \in \ \mathbb{Q}.$$

C'est-à-dire $\sqrt{2}$ est un rationnel. Ce qui est faux, **contradiction**.

Par conséquent, lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme

$$a + b\sqrt{2}, \quad a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z},$$

alors les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Exercice 2.4

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donner cette décomposition si

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Preuve : Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• **Analyse :** Supposons le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions

$$g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

avec

$$g \quad \text{paire} \quad \text{et} \quad h \quad \text{impaire}$$

telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + h(x). \tag{1}$$

Exercice 2.4

Comme g est paire et h est impaire on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \tag{2}$$

En additionnant et soustrayant les égalités (1) et (2) nous obtenons

$$\begin{aligned} 2g(x) = f(x) + f(-x) \quad &\Longrightarrow \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ 2h(x) = f(x) - f(-x) \quad &\Longrightarrow \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe une solution au problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.

Exercice 2.4

- **Synthèse :** Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.
  - On a bien $f = g + h$. En effet
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) + h(x) = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$
  - La fonction g est paire. En effet
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x).$$
  - La fonction h est impaire. En effet
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

Nous avons donc démontré par Analyse-Synthèse qu'il existe un unique couple (g, h) avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Finalement, si

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

alors

$$g(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1},$$

et

$$h(x) = \frac{x^3}{x^4+x^2+1}.$$

A faire chez soi - Exercice 2.5

Soit a et b deux réels. Montrer que

$$\left(a^2 + b^2 = 0\right) \implies (a = b = 0).$$

Solution : Voir CM.

A faire chez soi - Exercice 2.6

Soit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction. Montrer que

$$f \quad \text{impaire} \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0.$$

On rappelle que une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(-x) = -f(x).$$

Nous allons montrer la proposition en utilisant un raisonnement direct.

Réponse : Supposons f impaire. Montrons $f(0) = 0$. Puisque f est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(-x) = -f(x).$$

En particulier pour $x = 0$, on obtient

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \quad \Longrightarrow \quad 2f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0.$$

A faire chez soi - Exercice 2.7

Deux joueurs s'affrontent sur le jeu suivant. Ils disent chacun à leur tour un nombre entre 1 et 7 . Les nombres sont additionnés et dès que le cumul des nombres qu'ils ont proposés vaut 100, le jeu est fini. Le joueur qui a atteint 100 et a donc parlé en dernier gagne. Comment jouer ?

Solution : On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Nous allons trouver la réponse de manière naturelle, en partant de l'objectif qui est d'atteindre 100 . Si je veux atteindre 100 , il faut que mon adversaire ait atteint un nombre entre 93 (auquel cas je dirai 7) et 99 (auquel cas je dirai 1). Pour obtenir cela, il suffit que j'atteigne 92 à l'étape précédente. Mais pour atteindre 92 à coup sûr, j ' ai besoin que mon adversaire ait atteint un nombre entre 85 (auquel cas je dirai 7) et 91 (auquel cas je dirai 1). Pour cela, il faudrait que j'atteigne 84 à l'étape précédente. On reproduit le raisonnement et on réalise que pour gagner, il suffit que j'arrive à atteindre à l'étape précédente $84-8=76$, donc juste avant $76-8=68$, et ainsi de suite $60, 52, 44, 36, 28, 20, 12$ et 4 . On observe ici une suite arithmétique de raison 8 .

A faire chez soi - Exercice 2.7

Synthèse : Nous sommes partis du résultat (la victoire) pour remonter au début de la partie et voir comment la jouer. Nous pouvons maintenant donner la stratégie gagnante, en respectant les règles du jeu.

- Si je commence, je dis 4, puis mon adversaire va porter le cumul à un nombre entre 5 et 11, et je dis le chiffre qu'il faut pour atteindre 12, puis 20,28,36,44,52,60,68,74,82, et enfin 100.

- Si mon adversaire commence et connait cette stratégie, je perdrai. Mais sinon, je peux la ≪rattraper ≫ : dès que je peux je dis le chiffre me permettant de retomber sur 4 ou 12 ou 20 . . .. Si il commence par $1, 2, 3$, 5,6 ou 7, je réponds par $3, 2, 1, 7, 6, 5$. S'il commence par 4, je réponds par 1 et attends de voir ce qu'il dit. S'il dit $1, 2, 3, 4, 5$, ou 6, j'atteins 12 avec $7, 6, 5, 4, 3, 2$. Mais s'il répond 7, je recommence à dire 1 et attends le tour suivant pour atteindre 20 etc. S'il répond tout le temps 7, c'est qu'il avait compris la stratégie et je perds.

A faire chez soi - Exercice 2.8

Un vol a été commis dans un asile. Trois pensionnaires A, B et C sont suspects. Voici leurs témoignages, chacun formulant trois assertions :

- A : Je suis innocent. À l'heure du vol, j'étais avec B. C'est C le coupable.
- B : Je suis innocent. A aussi. A n'était pas avec moi à l'heure du vol.
- C : Je suis innocent. B aussi. A a menti trois fois.

Vous savez que chaque suspect a au moins menti une fois sur ses trois affirmations. Qui est le coupable ?

Solution : Trois coupables possibles, donc trois cas à étudier (on raisonne par disjonction des cas) :

A coupable : A et B ne peuvent pas être ensembles à l'heure du vol puisqu'il n'y a qu'un coupable.

Affirmations de A : F, F, F
Affirmations de B : V, F, V
Affirmations de C : V, V, V
Or C est censé mentir au moins une fois, donc A est innocent

A faire chez soi - Exercice 2.8

B coupable : A et B ne peuvent pas être ensembles à l'heure du vol puisqu'il n'y a qu'un coupable.

Affirmations de A : V, F, F

Affirmations de B : F, V, V

Affirmations de C : V, V, F

Les trois ont menti au moins une fois, donc B est potentiellement le coupable.

C coupable :

Affirmations de A : V, ?, V . La deuxième proposition est donc forcément fausse, donc A et B n'étaient pas ensembles.

Affirmations de B : V, V, ? . La troisième proposition est donc forcément fausse, donc A et B étaient ensemble. C'est en contradiction avec ce qui précède.

Affirmations de C : F, V, F

Il est impossible que A et B mentent au moins une fois. Donc C est innocent.

En conclusion, le coupable est B.

A faire chez soi - Exercice 2.9

Thomas, Jules et Yves sont partis contempler des oiseaux. Chacun a vu un oiseau que les deux autres n'ont pas vu. Chaque deux ont vu un oiseau que le troisième n'a pas vu, et un oiseau a été vu par les trois.
Parmi les oiseaux que Thomas a vus, deux sont jaunes. Pami ceux vus par Jules, trois sont jaunes, et pami ceux vus par Yves, quatre sont jaunes.
Combien d'oiseaux jaunes ont été vus au total ? Combien d'oiseaux non jaunes ont été vus au total ?

Solution : Nous allons remplir un tableau avec une ligne par individu et autant de colonnes que nécessaires pour les oiseaux.

	a	b	c	d	e	f	g
Thomas	V	X	X	V	V	X	V
Jules	X	V	X	V	X	V	V
Yves	X	X	V	X	V	V	V

Puisque que Yves n'a vu que quatre oiseaux et qu'il a vu au moins quatre oiseaux jaunes, on en déduit que tous ses oiseaux sont jaunes, donc c, e, f et g sont jaunes. Thomas n'a vu que deux oiseaux jaunes, donc a et d ne sont pas jaunes. Jules a vu trois oiseaux jaunes, donc b est jaunes. Au final : 5 oiseaux jaunes b, c, e, f, g et 2 non jaunes a et d.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Soit x un réel positif. Montrer que

$$(\forall \epsilon > 0,\ x < \epsilon) \quad \Longrightarrow \quad (x = 0)$$

Nous allons montrer la proposition en utilisant un raisonnement par contraposition. C'est-à-dire, nous allons montrer : soit x un réel positif

$$x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (\exists \epsilon > 0,\ x \geq \epsilon)$$

Preuve : Soit x un réel positif. Supposons $x \neq 0$. Donc $x > 0$. En choisissant

$$\epsilon = \frac{x}{2},$$

on obtient

- $\epsilon > 0$, et
- $x \geq \epsilon$.

Autrement dit, pour tout $x > 0$ existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq x$. Ce qui montre la proposition.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Soit a et b deux réels. Montrer en utilisant deux méthodes que

$$(a+b \geq 1) \implies \left(a \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad b \geq \frac{1}{2} \right).$$

Solution :

- **Par contraposition.** Nous allons donc montrer que

$$a < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b < \frac{1}{2} \implies (a+b<1).$$

  Cette implication est évidente. En effet, en additionnant les deux inégalités strictes de gauche on obtient celle de droite.

- **Par disjonction de cas.** Deux cas sont possibles :
  - Si $a \geq \frac{1}{2}$, alors on a bien $a \geq \frac{1}{2}$ ou $b \geq \frac{1}{2}$.
  - Si $a < \frac{1}{2}$, alors $-a > -\frac{1}{2}$ et $1-a > 1-\frac{1}{2}$. Donc

$$a+b \geq 1 \implies b \geq 1-a \implies b > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

  et on a bien $a \geq \frac{1}{2}$ ou $b \geq \frac{1}{2}$.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

La somme et le produit d'un nombre rationnel (non-nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.

Rappelons que :

- La somme de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$
- Le produit de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$

Nous allons montrer la proposition en raisonant par l'absurde.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Preuve : Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

- Il nous faut montrer que

$$r + x \notin \mathbb{Q}.$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $r + x \in \mathbb{Q}$. Alors on a

$$x = \underbrace{\underbrace{(x+r)}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r}_{\in\mathbb{Q}}}_{\in\mathbb{Q}}.$$

Contradiction ! Par conséquent $r + x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r + x$ est irrationnel.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

- Il nous faut montrer que
$$r \cdot x \notin \mathbb{Q}.$$
Raisonnons par l'absurde et supposons $r \cdot x \in \mathbb{Q}$. Alors on a
$$x = \underbrace{\underbrace{(r \cdot x)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r}}_{\in \mathbb{Q}}}_{\in \mathbb{Q}}.$$
Contradiction ! Par conséquent $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r \cdot x$ est irrationnel.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Un rectangle a pour aire 170 m^2. Montrer que sa longueur est supérieure à 13 m.

Soit $l \in \mathbb{R}_+^\times$ la largeur du rectangle et $L \in [l, +\infty[$ sa longueur. On doit donc montrer : $\forall l \in \mathbb{R}_+^\times,\ \forall L \in [l, +\infty[$on a

$$l \times L = 170 \quad \Longrightarrow \quad L > 13.$$

Nous allons montrer la proposition en utilisant un raisonnement par contraposition. C'est-à-dire, nous allons montrer : $\forall l \in \mathbb{R}_+^\times$, $\forall L \in [l, +\infty[$on a

$$L \leq 13 \quad \Longrightarrow \quad l \times L \neq 170.$$

Preuve : Supposons $L \leq 13$. Alors $l \leq L \leq 13$, c'est-à-dire

$$l \leq 13 \quad \text{et} \quad L \leq 13,$$

et on peut conclure par produit des inégalités que

$$l \times L \ < \ 13 \times 13 \ = 169 \ < \ 170.$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

Preuve : Notons

- $P =$ On a rangé $n+1$ chaussettes dans n tiroirs distincts.
- $Q =$ Il existe un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

On doit donc montrer que

$$P \quad \Longrightarrow \quad Q.$$

Nous allons montrer la proposition en raisonant par l'absurde. C'est-à-dire on suppose

$$P \quad \text{et} \quad (\text{non } Q), \qquad \text{et on essaye d'arriver a une contradiction}$$

Supposons donc que on a rangé $(n+1)$ chaussetes dans n tiroirs distincts, et que chaque tiroir contient au plus une paire de chaussettes. Alors il y aura au plus

$$1+1+\cdots+1=n$$

paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $(n+1)$. Donc un tiroir doit contenir au moins deux paires de chaussettes.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Déterminer toutes les fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui satisfont l'equation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) + xf(1-x) = 1 + x. \tag{3}$$

Preuve : Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

- **Analyse :** Supposons f est solution de l'equation. Posons

  $$y = 1 - x \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - y.$$

  Alors en remplaçant x par $1 - y$ dans (1), on obtient

  $$f(1-y) + (1-y)f(y) = 2 - y.$$

  D'où on peut conclure que, pour tout $y \in \mathbb{R}$

  $$f(1-y) = -(1-y)f(y) + 2 - y.$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Ainsi, en posant $y = x$ dans la équation de depart, on conclut

$$\begin{aligned} & f(y) + y[-(1-y)f(y) + 2 - y] = 1 + y \\ \iff & f(y) + [-yf(y) + y^2 f(y) + 2y - y^2] = 1 + y \\ \iff & f(y)(1 - y + y^2) + 2y - y^2 = 1 + y \\ \iff & f(y)(1 - y + y^2) = 1 - y + y^2. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $1 - y + y^2 \neq 0$, on en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = 1.$$

- **Synthèse :** Nous allons vérifier que la fonction constante $f = 1$ est bien solution du problème. En effet

$$f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

L'unique solution de cette équation est donc la fonction constante

$$x \longmapsto f(x) = 1.$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $f(x) = y$.

Preuve : Nous allons raisonner par analyse-synthèse.
Analyse : Supposons le problème résolu, c'est-à-dire qu'on a x tel que $f(x) = y$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-1} = y \iff (x+1) = (2x-1)y &\iff (x+1) = 2xy - y \\ &\iff y+1 = 2xy - x \\ &\iff y+1 = x(2y-1) \end{aligned}$$

et comme $y \neq \frac{1}{2}$, on peut écrire

$$x = \frac{y+1}{2y-1}.$$

Ainsi, s'il existe x tel que $f(x) = y$, x doit nécessairement être donné par la dernière égalité.

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Synthese : Vérifions que x est bien solution du problème. Nous devons montrer :

- $x \neq \frac{1}{2}$: Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons $x = \frac{1}{2}$. Alors

$$\frac{1}{2} = \frac{y+1}{2y-1} \implies 2y - 1 = 2y + 2 \implies -1 = 2.$$

  Contradiction ! Par conséquent $x \neq \frac{1}{2}$.

- $f(x) = y$: On compute

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{y+1}{2y-1} + 1}{\frac{2(y+1)}{2y-1} - 1} = \frac{\frac{(y+1)+(2y-1)}{2y-1}}{\frac{2(y+1)-(2y-1)}{2y-1}} = \frac{(y+1)+(2y-1)}{2(y+1)-(2y-1)}$$
$$= \frac{3y}{3} = y.$$

Nous avons donc démontré par Analyse-Synthèse que si $y \neq \frac{1}{2}$, alors il existe un unique réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, tel que

$$f(x) = y.$$

Exercice 2.10

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a

$$\mathscr{P}(n) : \; n! \geq 2^{n-1}.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a $1! = 1 \geq 2^{1-1}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons que

$$(n+1)! \geq 2^{n+1-1} = 2^n.$$

On a

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1}.$$

Exercice 2.10

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad n+1 \geq 2.$$

Par conséquent

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Exercice 2.11.a

Démontrer par récurrence l'égalité suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Exercice 2.11.a

On compute

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2.11.b

Démontrer par récurrence l'égalité suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Exercice 2.11.b

On compute

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad + \quad (n+1)^2 \\
&\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2.11.c

Démontrer par récurrence l'égalité suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 .$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k \right)^2 .$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 .$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

Exercice 2.11.c

On compute

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$
$$\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3.$$

Maintenant, d'après l'exercice (2.11.a) on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

d'où on conclut

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} &= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} \\ = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4n + 4]}{4} &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Exercice 2.11.c

Mais

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 2.12

Démontrer que pour tout entier naturel n :

- $\mathscr{P}(n)$: 3 divise $(4^n + 2)$.
- $\mathscr{P}(n)$: 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- Soit un entier $a \geq 2$ tel que 3 divise $a^2 - a$. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, 3 divise $a^n - a$.
- $\mathscr{P}(n)$: 17 divise $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Exercice 2.12

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) : \quad 3 \text{ divise } 4^n + 2.$$

Initialisation : On a $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$4^n + 2 \text{ est divisible par } 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^n + 2 = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\exists k' \in \mathbb{Z}, \quad 4^{n+1} + 2 = 3k'$$

On a

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 2 &= 4 \cdot 4^n + 2 \\ &= 4(3k - 2) + 2 \quad (\textbf{Hypothèse de Recurrence}) \\ &= 3 \cdot 4k - 8 + 2 \\ &= 3 \cdot 4k - 6 = 3\underbrace{(4k - 2)}_{k'}. \end{aligned}$$

Exercice 2.12

C'est-à-dire $4^{n+1}+2$ est divisible par 3. Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$3 \text{ divise } 4^n + 2$$

Exercice 2.12

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n): \quad 7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

Initialisation : On a $3^{2\cdot 0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est divisible par } 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\exists k' \in \mathbb{Z}, \quad 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7k'$$

On a

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} \\
&= 3^2(7k - 2^{n+2}) + 2 \cdot 2^{n+2} \quad \textbf{(Hypothèse de Recurrence)} \\
&= 9 \cdot 7k - 9 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2} \\
&= 7 \cdot 9k - (9-2)2^{n+2} = 7\underbrace{(9k - 2^{n+2})}_{k'}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.12

C'est-à-dire $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ est divisible par 7. Fin de la recurrence.
Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

Exercice 2.12

Soit un entier $a \geq 2$ tel que 3 divise $a^2 - a$. Montrer la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) :\ n \geq 2, 3 \text{ divise } a^n - a.$$

Initialisation : La propriété est vraie au rang 2 d'après l'énoncé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$3 \text{ divise } a^n - a.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$3 \text{ divise } a^{n+1} - a.$$

On a

$$\begin{aligned} a^{n+1} - a &= a^{n+1} - a^2 + a^2 - a \\ &= a(a^n - a) + (a^2 - a) \end{aligned}$$

Or 3 divise $a^n - a$ par l'hypothèse de récurrence et 3 divise $a^2 - a$. Donc 3 divise la somme. C'est-à-dire : 3 divise $a^{n+1} - a$.

Exercice 2.12

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on a donc bien la propriété :

$$3 \text{ divise } a^n - a \text{ pour tout entier } n \geq 2.$$

Exercice 2.12

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) : \quad 17 \text{ divise } 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

Initialisation : On a $3 \cdot 5^{2\cdot 0+1} + 2^{3\cdot 0+1} = 3 \cdot 5 + 2 = 17$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17 $\iff$ $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\exists k' \in \mathbb{Z}, \quad 3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 17k'$$

On a

$$\begin{aligned}
3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 3 \cdot 25 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 25(17k - 2^{3n+1}) + 8 \cdot 2^{3n+1} \quad \textbf{(Hypothèse de Recurrence)} \\
&= 25 \cdot 17k - 25 \cdot 2^{3n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\
&= 17 \cdot 25k - (25-8)2^{3n+1} = 17\underbrace{(25k - 2^{3n+1})}_{k'}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.12

C'est-à-dire $3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ est divisible par 17. Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$17 \text{ divise } 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

Exercice 2.13

Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n + 1$.

Preuve : On raisonne par **récurrence double** sur n.

Initialisation : On a

$$u_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vrais.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vrais, c'est-à-dire

$$u_n = 2^n + 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2^{n+1} + 1.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie, autrement dit, montrons que

$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 1.$$

Exercice 2.13

On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(2^{n+1}+1) - 2(2^n+1) \quad \textbf{(Hypothèse de Récurrence)} \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2 \\ &= (3-1) \cdot 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \implies \mathscr{P}(n+2)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = 2^n + 1.$$

A faire chez soi - Exercice 2.14

Démontrer par récurrence l'égalité suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathscr{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)((n+1)+3)}{4((n+1)+1)((n+1)+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.$$

A faire chez soi - Exercice 2.14

On compute

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} & \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n^3+5n^2+4n)+(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n^2+5n+4)+(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

A faire chez soi - Exercice 2.14

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

A faire chez soi - 2.16

Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

Preuve : On raisonne par **récurrence triple** sur n.

Initialisation : On a

$$u_0 = 0 = 0(0-1) \quad \text{et} \quad u_1 = 0 = 1(1-1) \quad \text{et} \quad u_2 = 2 = 2(2-1).$$

Donc $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vrais.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ sont vrais, c'est-à-dire

$$u_n = n(n-1) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = (n+1)n \quad \text{et} \quad u_{n+2} = (n+2)(n+1).$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+3)$ est vraie, autrement dit, montrons que

$$u_{n+3} = (n+3)(n+2).$$

A faire chez soi - 2.16

On a

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \\
&= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) \\
&= 3(n+2)(n+1) + n(n-1-3(n+1)) \\
&= 3(n+2)(n+1) + n(-2n-4) \\
&= 3(n+2)(n+1) - 2n(n+2) \\
&= (n+2)(3(n+1) - 2n) \\
&= (n+2)(n+3).
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent

$$\mathscr{P}(n),\ \mathscr{P}(n+1) \text{ et } \mathscr{P}(n+2) \implies \mathscr{P}(n+3),$$

et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = n(n-1).$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Démontrer que pour tout entier non nul n on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1.$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

On compute

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!\right) + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&\underbrace{=}_{\text{Hypothèse de Recurrence}} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)!(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut pour tout entier naturel n l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

Soit (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos(\theta)$ et pour $n \geq 2$:

$$u_n = 2u_1 u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos(n\theta)$.

Preuve : On raisonne par récurrence double sur n.

Initialisation : On a

$$u_0 = 1 = \cos(0) \quad \text{et} \quad u_1 = \cos(\theta).$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vrais.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vrais, c'est-à-dire

$$u_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \cos((n+1)\theta).$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie, autrement dit, montrons que

$$u_{n+2} = 2u_1 u_{n+1} - u_n \cos((n+2)\theta).$$

A faire chez soi - Exercice supplémentaire

On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_1 u_{n+1} - u_n \\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad \textbf{(Hypothèse de Récurrence)} \\
&= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos^2(\theta)\cos(n\theta) - 2\sin(n\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - \sin(n\theta)2\cos(\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\
&= \cos(n\theta + 2\theta) \\
&= \cos((n+2)\theta)
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \implies \mathscr{P}(n+2)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$u_n = \cos(n\theta).$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.17

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n):\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Quelques rappels :

Pour toute couple d'entiers $0 \leq k \leq n$ on appelle **coefficient binomial** le nombre

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit : k **parmi** n. Le coefficient binomial satisfait les propriétés suivants :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. (**Rappel :** $0\,!=1$).
- **Formule de Pascal** : pour tous entiers n et k tels que $0 < k \leq n$ on a

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.17

$$\mathscr{P}(n) : \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Preuve : On fixe $a,\ b \in \mathbb{R}$ et on raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : On a

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} ab^0 + \binom{1}{1} a^0 b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.17

On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \textbf{(Hypothèse de Recurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\right) + \binom{n}{n}b^{n+1}. \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\right) + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le changement d'indice $l = k+1$ on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}a^{n+1-l}b^l = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.17

D'où on conclut

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1}$$

Ce qui est équivalent à

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1}.$$

Maintenant, **la formule de Pascal** nous dit

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.17

Ainsi

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\right) + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\right) + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Pour aller plus loin - Exercice 2.18

On revient sur la propriété :

≪Tout ensemble fini de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus grand élément.≫

Pour définir $\mathbb{N}$, on peut soit admettre cette propriété et démontrer l'axiome de récurrence, soit admettre l'axiome de récurrence et en déduire cette propriété.

Démontrer que si l'on admet l'axiome de récurrence, on peut démontrer la propriété.

Réponse : Soit la propriété :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n$: tout ensemble à n élement admet un plus grand élément.

Initialisation : La propriété est vraie au rang 1 : un ensemble à 1 élément admet un plus grand élément : l'unique élément de l'ensemble.

Pour aller plus loin - Exercice 2.18

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence).

On considère un ensemble A à $n+1$ éléments. On choisit un élement α de A. Alors

$$A \setminus \{\alpha\}$$

est un ensemble à n élements. D'après l'hypothèse de récurrence il admet un plus grand élément β. Nous avons deux cas à étudier :

- Si $\alpha \geq \beta$ alors α est le plus grand élément de A.
- Sinon, β est le plus grand élément de A.

Dans tous les cas, A admet un plus grand élément donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$: tout ensemble à n élement admet un plus grand élément.