Département de Mathématiques
PréING1-Analyse
2021 - 2022

TD 4 - Dérivabilité

Calcul de dérivée et dérivabilité

Exercice 1. -
Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^3(x+1)^2, \quad f_2(x) = (3x-2)^4, \quad f_3(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}, \quad f_4(x) = \left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)^3,$$

$$f_5(x) = \sqrt{x^3+2x^2+1}, \quad f_6(x) = e^{x\sin(x)}, \quad f_7(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad f_8(x) = \sqrt{\sqrt{2x}+5}.$$

Exercice 2. -
Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}.$$

Exercice 3. -
La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4. -
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction suivante f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2+bx+1 & : \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5. -
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}.$$

Exercice 6. -
Calculer l'expression de la dérivée d'ordre n des fonctions définies par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \sin^2 x, \quad f_3(x) = (x^2+2x+3)e^{-x}, \quad f_4(x) = x^2\cos x,$$

$$f_5(x) = \cos^3 x, \quad f_6(x) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 7. -
Soient a un réel, et $n, k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$((x+a)^n)^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k} & : \text{ si } k \leq n \\ 0 & : \text{si } k > n \end{cases}$$

Exercice 8. -
Soient a et b deux réels et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et quand $a=b$ en déduire $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2$.

Exercice 9. -
Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Classe C^k

Exercice 10. -
Déterminer le prolongement par continuité en 0 de chacune des fonctions suivantes et déterminer si la fonction obtenue est de classe C^1 :

$$f_1(x) = \sqrt{x}\ln x, \quad a=0 \qquad ; \qquad f_2(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}, \quad a=0$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)}, \quad a=0 \qquad ; \qquad f_4(x) = x^3\sin(\frac{1}{x}), \quad a=0$$

$$f_5(x) = x\sin(\frac{1}{x}), \quad a=0$$

Exercice 11. -
Soit f une fonction réelle à valeurs réelles

$$f(x) = \begin{cases} e^x & : \text{ si } x<0 \\ ax^2+bx+c & : \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer a,b,c pour que f soit de classe C^2. La fonction f est-elle de classe C^3 ?

Exercice 12. -
Etudier si la fonction suivante est de classe C^1, C^2 et C^3 sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & : \text{ si } x \leq 0 \\ \sin(x) & : \text{ sinon} \end{cases}$$

Grands théorèmes

Exercice 13. -

1. Montrer que pour tout $x>0$, on a :
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
2. $\forall n>1$, montrer que :
$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$$
3. On pose
$$H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}$$
Montrer que :
$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$$
En déduire que H_n converge et déterminer sa limite.

Exercice 14. -

1. Soient $a_0, ..., a_n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{n+1} = 0$, montrer que $\exists x \in]0,1[$ tel que $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$. (Considérer la fonction $f(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$).
2. Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes, montrer que $P^{'}$ en a au moins $n-1$.

Exercice 15. -
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^n + ax + b$.

1. Montrer que le polynôme f admet au plus trois racines réelles.
2. Si n est pair. Montrer que le polynôme f admet au plus deux racines réelles.

Exercice 16. - *Théorème de Rolle à l'infini*
Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 17. -
Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "c" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Applications

Exercice 18. -
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{5x^3 - x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 4x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Exercice 19. -
Soient C_1 et C_2 deux courbes définies par l'équation $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ respectivement.

1. Démontrer que les courbes C_1 et C_2 admettent une unique tangente commune.
2. Trouver les droites tangentes à C_1 passant par le point $(0, -1)$.
3. Trouver les droites tangentes à C_2 de la pente -2.

Exercice 20. -
Soient $n \geq 2$ et $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}_+$, et on le détermine.
3. En déduire les inégalités suivantes : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n),$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

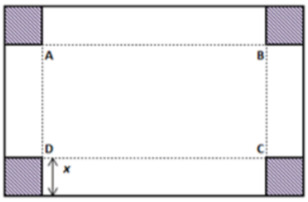
$$(y+x)^n \leq 2^{n-1}(y^n + x^n).$$

Exercice 21. -
Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 + 5x + 6, \quad x \in [-4, 4]$.

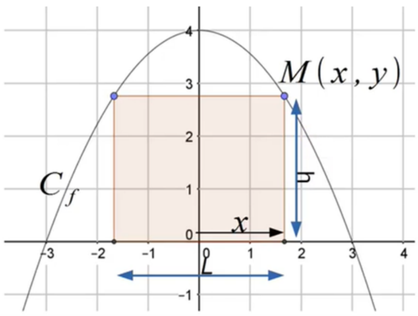
2. $f_2(x) = x^3 - 3x^2 - x + 10, \quad x \in [0, 3]$.
3. $f_3(x) = -2\cos x - x, \quad x \in [0, 4\pi]$.

Exercice 22. -
On dispose une feuille de carton rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux, aux quatre coins (voir la figure), puis on plie le carton suivant les segments $[AB], [BC], [CD], [DA]$. On appelle x la mesure en cm de côté de chaque carré découpé.



1. Préciser entre quelles valeurs peut varier x pour que la boîte soit réalisable. On obtiendra un intervalle I. Déterminer le volume de la boîte obtenue en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction volume sur I, et en déduire la valeur de x qui rend le volume de la boîte maximum. Quels sont alors les dimensions et le volume de la boîte obtenue ?

Exercice 23. -
On considère un rectangle inscrit dans la surface délimitée par une parabole C_f : $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$ et par la droite $y = 0$ (voir la figure). Soient $M(x, y)$ un point de C_f et P l'aire de ce rectangle.



1. Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x, et exprimer P en fonction de x.
2. Etudier les variations de P en fonction de x, et déterminer les dimensions du rectangle lorsque celui-ci a une aire maximale.

Pour s'entraîner à la maison

Exercice 24. -
Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^{\frac{3}{2}} e^{x^2}, \quad f_2(x) = \frac{\sin(2x^2)}{x^2+3}, \quad f_3(x) = \sin(\cos((3x-2)^2)), \quad f_4(x) = \frac{2}{\tan(2x+1)},$$
$$f_5(x) = \sin(x^8 + 5x^2), \quad f_6(x) = e^x \sin(5x), \quad f_7(x) = e^x \ln(\ln(\ln(x))),$$
$$f_8(x) = \sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2) + x^3}\right).$$

Exercice 25. -
Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}, \qquad d : x \mapsto |x|.$$

Exercice 26. -
Calculer l'expression de la dérivée d'ordre n des fonctions définies par :

$$f_1(x) = x^2 e^x, \quad f_2(x) = x^{n-1}\ln(x+1).$$

Exercice 27. -
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\qquad (x^n e^{\frac{1}{x}})^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}.$

Exercice 28. -
Déterminer le prolongement par continuité en a de chacune des fonctions suivantes et déterminer si la fonction obtenue est de classe C^1 :

$$f_1(x) = \frac{e^{2x}-1}{x^2}, \quad a = 0 \quad ; \quad f_2(x) = x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}), \quad a = 0 \quad ; \quad f_5(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad a = 0$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad a = 1 \quad ; \quad f_4(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}), \quad a = 0.$$

Exercice 29. -
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & : \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et que $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(\frac{1}{x})$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30. -
1. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction $\ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. soit
$$f(x) = \begin{cases} x^3\ln|x| & : \text{ si } x \leq 0 \\ 0 & : \text{ sinon} \end{cases}$$
Soit f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$. Trouver les valeurs possibles de $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 31. -
Etudier si la fonction suivante est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & : \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & : \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 32. -
1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
   (a) On pose
$$v_n = 8n + 4 - 8\sqrt{n(n+1)}$$
   (b) Montrer que :
$$\frac{1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$$
   En déduire que v_n converge et déterminer sa limite.

Exercice 33. -
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \ln(1-x), \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}).$$

Exercice 34. -
Soient C_1 et C_2 deux courbes définies par l'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{x}$ respectivement.

1. Démontrer que les courbes C_1 et C_2 admettent une unique tangente commune.
2. Trouver les droites tangentes à C_1 passant par le point $(0, -2)$.
3. Trouver les droites tangentes à C_2 de la pente -1.
4. Démontrer que les courbes $C_3 : y = \sqrt[3]{3x}$ et C_2 admettent un point commun où la droite tangente à C_2 et la droite tangente à C_3 sont orthogonales. Trouvez-les.

Pour aller plus loin à la maison

Exercice 35 (Injectivité locale)**. -**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall\, x \in V \setminus \{a\},\ f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

Exercice 36 (Propriétés de parité et de périodicité)**. -**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 37. -
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$ s'annulant en $n+1$ points distincts de $]a, b[$.
On suppose donc qu'il existe $(n+1)$ éléments de $]a, b[$, notés : $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < ... < x_n^{(0)}$, qui vérifient : $f(x_0^{(0)}) = f(x_1^{(0)}) = ... = f(x_n^{(0)}) = 0$.

1. Montrer, par récurrence sur k que : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, il existe $(n-k+1)$ éléments de $]a, b[$, notés $x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < ... < x_{n-k}^{(k)}$ qui vérifient : $f^{(k)}(x_0^{(k)}) = f^{(k)}(x_1^{(k)}) = ... = f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$.
2. Que pouvez vous en déduire concernant l'existence de zéros éventuels de $f^{(n)}$ sur $]a, b[$?

Exercice 38. -
Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui possède un unique point fixe ω tel que $f(\omega) = \omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que si $|f'(\omega)| < 1$, alors $\exists \alpha > 0, \exists 0 < k < 1, \forall x \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[,\ \ \dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} < k$.
2. En déduire, par récurrence, que si $x_0 \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |f(x_n) - f(\omega)| \leq k^n |x_0 - \omega|$.
3. Conclure quant à la convergence vers w.
4. On suppose maintenant que $|f'(\omega)| > 1$ et on va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n = \omega$ à partir d'un certain rang).
   Montrer que $\exists \alpha > 0, \exists k > 1, \forall x \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[,\ \ \dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} > k$.
5. Supposons donc, par l'absurde, que : $\forall n, x_n \neq \omega$ (non stationnaire), et que $\lim u_n = \omega$.
   (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang N, on aura : $x_n \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[$,

(b) En déduire, par récurrence, que : $\forall n \geq N, \quad |f(x_n) - f(\omega)| \geq k^{n-N}|x_N - \omega|$ et obtenez la contradiction souhaitée.

6. Que dire dans le cas $|f'(\omega)| = 1$?

   On pourra étudier la suite définie à l'aide de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$, avec $x_0 = 0$ puis avec $x_0 = 2$.