Dérivabilité et calculs de dérivées

Exercice 1 *Tech*

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^3(x+1)^2$.
2. $f_2(x) = (3x-2)^4$.
3. $f_3(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$.
4. $f_4(x) = \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^3$.
5. $f_5(x) = \sqrt{x^3+2x^2+1}$.
6. $f_6(x) = e^{x\sin(x)}$.
7. $f_7(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
8. $f_8(x) = \sqrt{\sqrt{2x}+5}$.

Solution

1. $f_1'(x) = 3x^2(x+1)^2 + x^3 \cdot 2(x+1) = 3x^2\left(x^2+2x+1\right) + 2x^4 + 2x^3 = 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x^4 + 2x^3$
   Donc $f_1'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 3x^2$
2. $f_2'(x) = 4 \cdot (3) \cdot (3x-2)^3 = 12(3x-2)^3$
   Donc $f_2'(x) = 12(3x-2)^3$
3. $f_3'(x) = \dfrac{(4x)\left(x^2+3\right) - (2x)\left(2x^2+1\right)}{\left(x^2+3\right)^2} = \dfrac{4x^3+12x-4x^3-2x}{\left(x^2+3\right)^2}$
   Donc $f_3'(x) = \dfrac{10x}{\left(x^2+3\right)^2}$
4. $f_4'(x) = 3 \cdot \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)' \cdot \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^2$
   $= 3 \cdot \left(\dfrac{3(2x+1)-2(3x+5)}{(2x+1)^2}\right) \cdot \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^2$
   $= 3 \cdot \left(\dfrac{6x+3-6x-10}{(2x+1)^2}\right) \cdot \left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^2$
   $= 3 \cdot \left(\dfrac{-7}{(2x+1)^2}\right)\left(\dfrac{3x+5}{2x+1}\right)^2$
   Donc $f_4'(x) = \dfrac{-21(3x+5)^2}{(2x+1)^3}$
5. $f_5'(x) = \dfrac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2+1}}$
6. $f_6'(x) = (x \cdot \sin x)' \cdot e^{x\cdot\sin x} = (\sin x + x \cdot \cos x) \cdot e^{x \cdot \sin x}$
   Donc $f_6'(x) = (\sin x + x \cdot \cos x) \cdot e^{x\cdot \sin x}$
7. $f_7'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
   Donc $f_7'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Solution

1. On note que x et $|x|$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
   Ainsi, leur produit $x.|x|$ définit ume fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Vérifions la dérivabilité de f en 0. Pour cela on calcule la limite suivante :
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot|x|}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}|x| = 0\end{aligned}$$
   On a bien obtenu une limite finie dans la fonction est dérivable.

2. Les deux fonctions x et $1+|x|$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et de plus $1+|x|$ (le denominateur) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$ alors, g le quotient de ces deux fonctoons dérivables est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Il reste donc à vérifier la dérivabilité de g en 0 :
On calcule la limite :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+|x|}-0=\lim_{x-0}\frac{x}{1+|x|}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}=1\end{aligned}$$
Comme cette dernière limite est finie : on conclut que f est dérivable en 0, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. $h : x \to \dfrac{1}{1+|x|}$ La fonction $1+|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et s'annule pas. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Il reste à vérifier si la fonction h est dérivable en 0.
On étudie le taux de variation :
$\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+|x|}-1}{x-0}=\dfrac{1-1-|x|}{x(1+|x|)}=-\dfrac{|x|}{x(1+|x|)}$
La limite du taux de variation en 0 est soit 1 si $x>0$, soit -1 si $x<0$
Donc ce taux n'admet pas de limite. On conclut que h n'est pas dérivable en 0. h est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en $\mathbb{R}$].

Exercice 3 ****
La fonction $x \to \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?
Solution
$$\frac{\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{0}}{x-0}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-1-1}{x}=2\frac{\cos^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-1}{x}=-2\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 4}=-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}$$
or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{2}=0$ et $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sin u}{u}=1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}=1$
Finalement $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-\cos\sqrt{0}}{x-0}=-\dfrac{1}{2}$
Comme le taux de variation a une limite finie, la fonction est dérivable en 0.

Exercice 4 $\circ$
Déterminer a et b pour que la fonction f définie ci-dessous de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $f : \begin{cases} x\mapsto\sqrt{x} & \text{si } 0\leqslant x<1\\ x\mapsto ax^2+bx+c & \text{si } 1\leqslant x\end{cases}$
Solution
La fonction f est la restriction de la fonction $\sqrt{\ }$ sur $[0;1[$ donc elle est continue et dérivable sur $]0;1]$
La fonction f est la restriction d'une fonction polynôme sur $[1;+\infty[$ donc elle est continue et dérivable sur $]1;+\infty[$
On s'intéresse donc à la continuité et la dérivabilité en 1 :
$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 1}ax^2+bx+c=a+b+c$. La fonction f est donc continue en 1 si et seulement si $a+b+c=1$
La fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable en 1 et de nombre dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$
La fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$ est dérivable en 1 et de dérivée $2a+b$
La fonction f est donc dérivable en 1 lorsque $a+b+c=1$ et $2a+b=\dfrac{1}{2}$
En utilisant a comme paramètre, $b=\dfrac{1}{2}-2a$ et $c=1-a-b=1-a-\dfrac{1}{2}+2a=1+a-\dfrac{1}{2}$ on a donc
$ax^2+bx+c=ax^2+\left(\dfrac{1}{2}-2a\right)x+1+a-\dfrac{1}{2}$
$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+\dfrac{1}{2}(x+1)$
On remarque la partie qui ne dépend pas de a assure la continuité et la dérivabilité et la partie en a rajoute une fonction dont la fonction et la dérivée en 1 valent 0.

Exercice 5 *Tech*
Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+2}-e^2}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}.$$

Solution

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+2}-e^2}{x}=3e^{3\times 0+2}=3e^2$ (c'est le nombre dérivé en 0 de la fonction $x\mapsto e^{3x+2}$)
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\sin 0=0$ (c'est le nombre dérivée en 0 de la fonction cos)
3. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)-\ln(2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{2-x}=-1$ (c'est le nombre dérivée en 0 de la fonction $x\mapsto\ln(2-x)$)
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\exp(\cos x)-\exp(\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\sin 0\exp(\cos 0)=0$ (c'est le nombre dérivée en 0 de la fonction $x\mapsto\ln(\cos x)$)
5. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}=0$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\sin x\frac{x}{1-\cos x}=0$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}(\cos x+1)=0$

Calculs de dérivée n-ième

Exercice 6

Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer l'expression de la dérivée d'ordre n des fonctions f,g,h définies par :

1. $f_1(x)=\sin x$.
2. $f_2(x)=\sin^2 x$.
3. $f_3(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$.
4. $f_4(x)=x^2\cos x$.
5. $f_5(x)=\cos^3 x$.
6. $f_6(x)=\frac{1}{x}$.
7. $f_7(x)=x^2e^x$
8. $f_8(x)=x^{n-1}\ln(x+1)$

Solution

1. On définit $\forall n\in\mathbb{N}, P(n) : f_1^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
   - On a $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$. Donc $P(1)$ est vraie.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie.
     $f^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
     Donc $f^{(n+1)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$
     Donc $P(n+1)$ est vérifié.
   - Donc $\forall n\in\mathbb{N}, \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
2. On a $f_2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1-\sin(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$
   On applique la propriété précédente pour imaginer la formule :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*, f_2^{(n)}=2^{n-1}\sin(2x+(n-1)\frac{\pi}{2})$$
   que l'on peut démontrer par récurrence.
3. On utilise la formule de Leibniz
   $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+2x+3)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}=\binom{n}{0}(x^2+2x+3)(-1)^ne^{-x}+\binom{n}{1}(2x+2)(-1)^{n-1}e^{-x}+\binom{n}{2}2(-1)^{n-2}e^{-x}$
   $=(x^2+2x+3-(2x+2)n+n(n-1))e^{-x}(-1)^n$
   $=(x^2+2(1-n)x+n^2-3n+3)e^{-x}(-1)^n$

4. On utilise la formule de Leibniz
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(n-k)} = \binom{n}{0}x^2\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{1}2x\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{2}2\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$
$= x^2\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$
5. $h(x)=\cos^3(x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$
On peut donc imaginer la formule :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, f_3^{(n)}=\frac{1}{4}\left(3\cos(x+n\frac{\pi}{2})+3^n\cos(3x+n\frac{\pi}{2})\right)$$
que l'on peut démontrer par récurrence.
6. $f_6(x)$ On conjecture $f_6^{(n)}=\frac{(-1)^n(n!)}{x^{n+1}}$
On démontre par réccurence : élément de preuve :
Initialisation :
$f_6^{(0)}=\frac{(-1)^0(0!)}{x^{0+1}}$ ok
Hérédité :
On suppose $(f_6^{(n)})'=-(n+1)\frac{(-1)^n(n!)}{x^{n+2}}=\frac{(-1)^{n+1}((n+1)!)}{x^{n+2}}$
7. On utilise la formule de Leibniz
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}=\binom{n}{0}x^2e^x+\binom{n}{1}2xe^x+\binom{n}{2}2e^x$
$=e^x(x^2+2nx+n(n-1))$
8.

Exercice 7
Soient a un réel, et $n,k\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$((x+a)^n)^{(k)}=\begin{cases}\frac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k} & : \text{si } k\leqslant n\\ 0 & : \text{si } k>n\end{cases}$$

Solution
Soit $n\in\mathbb{N}$. On raisonne par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$
On définit la propriété
$$\forall k\in\mathbb{N}, P_k : ((x+a)^n)^{(k)}=\begin{cases}\frac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k} & : \text{si } k\leqslant n\\ 0 & : \text{si } k>n\end{cases}$$
La propriété est vraie au rank $k=0$ car $\frac{n!}{(n-0)!}(x+a)^{n-0}=((x+a)^n)^{(0)}$
Supposons qu'elle est vraie au rang $k\in\mathbb{N}$, alors
$\forall x\in\mathbb{R}, ((x+a)^n)^{(k+1)}=\left(((x+a)^n)^{(k)}\right)'$
Soit $k>n$ alors $((x+a)^n)^{(k+1)}=(0)'=0$
Sinon $((x+a)^n)^{(k+1)}=\left(\frac{n!}{(n-k)!}(x+a)^{n-k}\right)'$
Soit $k=n$, donc $((x+a)^n)^{(n+1)}=\left(\frac{n!}{(n-n)!}(x+a)^{n-n}\right)'=0$
Soit $k<n$ et
$\forall x\in\mathbb{R}, ((x+a)^n)^{(k+1)}=\frac{(n-k)(n!)}{(n-k)!}(x+a)^{n-k-1}=\frac{n!}{(n-(k+1))!}(x+a)^{n-(k+1)}$.
Dans tous les cas, on a obtenu la formule pour $k+1$ donc P_{k+1} est vraie.
Donc $\forall n\in\mathbb{N}, P_n$ est vraie.

Exercice 8
Soient a et b deux réels et $f(x)=(x-a)^n(x-b)^n$.
Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.
Indication : choisir $a=b$.

Solution
Puisque f est le produit de deux fonctions dérivables :
$g(x)=(x-a)^n$ et $h(x)=(x-b)^n$ on peut utiliser la formule de Leibniz pour calculer $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\cdot g^{(k)}\cdot h^{(n-k)}(x)$$

On peut montrer par récurrence que $g^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$
De même $h^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}(x-b)^{n-k}$
Finalement

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\cdot\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}\cdot\frac{n!}{k!}(x-b)^{k}=n!\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}(x-a)^{n-k}\cdot(x-b)^{k}$$

Finalement :

$$f^{(n)}(x)=n!\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)^2\cdot(x-a)^{n-k}\cdot(x-b)^{k}$$

Lorsque $a=b$, la formule devient :

$$f^{(n)}(x)=n!(x-a)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)^2$$

Pour $a=b$, $f(x)=(x-a)^{2n}$ donc $f^{(2n)}(x)=\dfrac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$
On obtient donc la formule

$$\left(\begin{array}{c}2n\\n\end{array}\right)=\frac{(2n)!}{n!n!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)^2$$

Exercice 9
Déterminer le prolongement par continuité en 0 de chacune des fonctions suivantes et déterminer si la fonction obtenue est de classe C^1 (c'est à dire dérivable et à dérivée continue).

1. $f_1(x)=\sqrt{x}\ln x$
2. $f_2(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}$
3. $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)}$
4. $f_4(x)=x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. $f_5(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Solution

1. On commence par prolonger f_1 par continuité en 0. On calcule la limite :

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x=\lim_{x\to0^+}2\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}$$

on a $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{u\to0}u\ln u=0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=0$.
Donc $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x=0$
Ainsi, on peut prolonger f_1 por continuité en 0 et on definit la nouvelle fonction $\tilde{f}_1$ continue en 0 :

$$\tilde{f}_{1(x)}=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \sqrt{x}\cdot\ln x & \text{si } x>0\end{cases}$$

Etudions maintenant la dérivabilité de f_1.
Sur $]0;+\infty[$, $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto\ln x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc leur prodiit $\sqrt{x}\cdot\ln x$ définit aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On examine maintenant la dérivabilité de $\tilde{f}_1$ en 0.
On calcule la limite :
$\dfrac{\tilde{f}_1(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}\cdot\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty.$
Cette dernière limite n'est pas finie donc $\tilde{f}_1$ n'est pas dérivable en 0 .

2. Pour prolonger f_2 par continuité en 0 , on commence par calculer la limite :
Pour pouvoir la prolonger en 0, il faudrait qu'elle possède une limite finie en 0.
Or : $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x}\sqrt{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
On peut donc prolonger f_2 en 0 : on définit la fonction $\widetilde{f_2}$ le prolongement de f_2 par continuité :
$$\tilde{f_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudions maintenant la dérivabilité de f_2.
Comme précédemment, sur $\mathbb{R}^+*$, f_2 est dérivable comme quotient de fonction dérivables.
Etudions la dérivabilité en 0.
On calcule :
$\dfrac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{e^x-1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{e^x-1}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
La limite n'est pas finie, f_2 n'est donc pas dérivable en 0.

3. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)} = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \dfrac{x}{\ln(x+1)}$
On a $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\to} g'(x)$ en posant g définie de $]-1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$
g est une fonction dérivable avec $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ donc $g'(0) = \dfrac{1}{2}$
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$
On a aussi $\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}$ en posant h définie de $]-1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $h : x \mapsto \ln(x+1)$
h est une fonction dérivable avec $h'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ donc $h'(0) = \dfrac{1}{2}$
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{1}{1+0} = 1$
Finalement en effectuant le produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)} = \dfrac{1}{2}$
Ainsi, on peut prolonger f_1 par continuité en 0 et on definit la nouvelle fonction $\tilde{f_1}$ continue en 0 :
$$\tilde{f_3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudions maintenant la dérivabilité de f_3.
Comme précédemment, sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_3 est dérivable comme quotient de fonction dérivables.
Etudions la dérivabilité en 0.
On calcule :
$\dfrac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{2}}{x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \dfrac{\ln(x+1)}{2x}}{\ln(x+1)}$

4. On sait $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant 1$ donc $|f_4(x)| < |x^3|$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x) = 0$.
Ainsi, on peut prolonger f_4 por continuité en 0 et on definit la nouvelle fonction $\tilde{f_4}$ continue en 0 :
$$\tilde{f_4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudions maintenant la dérivabilité de f_4.
Comme précédemment, sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_4 est dérivable comme quotient de fonction dérivables.
Etudions la dérivabilité en 0.
On calcule :
$\dfrac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0} = \dfrac{x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On sait $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$ donc $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| < \left|\frac{1}{x}\right|$ donc $|\frac{f_4(x)-f_4(0)}{x-0}| < |x|$.
donc la limite est 0. Donc la fonction f_4 est dérivable en 0.

5. On sait $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant 1$ donc donc $|f_5(x)| \leqslant |x|$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0} f_5(x) = 0$.
Ainsi, on peut prolonger f_5 por continuité en 0 et on definit la nouvelle fonction $\tilde{f_5}$ continue en 0 :
$$\tilde{f_5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Etudions maintenant la dérivabilité de f_4.
Comme précédemment, sur $\mathbb{R}^{+*}$, f_5 est dérivable comme quotient de fonction dérivables.
Etudions la dérivabilité en 0.
On calcule :
$$\frac{f_5(x)-f_5(0)}{x-0} = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi k}}\right) = \sin(2\pi k) = 0$ et $\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$
Or les suites $\left(\frac{1}{2\pi k}\right)_k$ et $\left(\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right)_k$ tendent toutes les deux vers 0 donc la limite du taux de variation n'existe pas. Donc la fonction n'est pas dérivable en 0

Exercice 10
Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f.
Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Solution

1. f est continue sur $]1; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]1; +\infty[$
f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$ $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.
f étant une fonction continue et strictement croissante, définie sur un intervalle, elle est injective.
On détermine $f(]1; +\infty[) =]-1; +\infty[$.
Donc f est une bijection croissante de $]1; +\infty[$ dans $]-1; +\infty[$.
2. $g(0) = x \Leftrightarrow 0 = f(x) \Leftrightarrow x\ln x - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$
Or $0 \notin]1; +\infty[$
Donc $g(0) = e$
La fonction f' ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$, la fonction g est dérivable sur $]-1; +\infty[$, de dérivée :
$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\ln g(x)}$
On a donc $g'(0) = \frac{1}{\ln g(0)} = \frac{1}{\ln e} = 1$

Fonctions de classe C^k

Exercice 11 ◦
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
Soit $f : \begin{cases} x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$
Déterminer a, b, c pour que f soit C^2.
La fonction f est-elle C^3 ?
Solution
f est de classe C^2 ssi et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction est continue donc
   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$
   Or $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^0 = 1$
   et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$
   Donc $c = 1$
2. f est dérivable et de dérivée continue :
   $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$
   Or $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = e^0 = 1$
   et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2a \cdot 0^2 + b = b$
   Donc $b = 1$
3. f est dérivable deux fois et de dérivée seconde continue donc
   $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} f''(x)$
   Or $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = e^0 = 1$
   et $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = 2a$
   Donc $a = \dfrac{1}{2}$

On vérifiera que la fonction
$f : \begin{cases} x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$
répond bien à la question.
Lorsque l'on dérive 3 fois à droite et à gauche, on obtient :
Or $\lim_{x \to 0^+} f'''(x) = e^0 = 1$
et $\lim_{x \to 0^-} f'''(x) = 0$
Donc la fonction obtenue n'est pas C^3

Exercice 12 ◦
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est elle de classe C^1 ? Est-elle de classe C^2 ? Est-elle de classe C^3 ?
Soit $f : \begin{cases} x \mapsto x \text{ si } x \leqslant 0 \\ x \mapsto \sin x \text{ si } x > 0 \end{cases}$
Solution
Sur $\mathbb{R}^*$ la fonction est C^∞ car les restrictions sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ sont C^∞. On s'intéresse donc au voisinage de 0
Comme dans l'exercice précédent, on étudie les limites à gauche et à droite :
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ donc la fonction est continue.
$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ et $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \cos(0) = 1$ donc la fonction est C^1
$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = -\sin(0) = 0$ donc la fonction est C^2
$\lim_{x \to 0^+} f'''(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} f'''(x) = -\cos(0) = -1$ donc la fonction n'est pas C^3

Grands théorèmes

Exercice 13

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :
   $$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
2. $\forall n > 1$, montrer que :
   $$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$$
3. On pose
   $$H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$
   Montrer que :
   $$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$$

4. En déduire que H_n converge et déterminer sa limite.
5. On pose

$$S_n = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k}$$

Montrer que S_n converge et déterminer sa limite.

Solution

1. On utilise le théorème des accroissements finis à la fonction $f : u \mapsto \ln(u)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$
   f est continue sur $[x; x+1]$, f est dérivable sur $]x; x+1[$ donc
   il existe $c \in]x; x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c)()(x+1) - 1) = f'(c)$
   Or $x < c < x+1$ donc $\frac{1}{x+1} \leqslant f'(c) \leqslant \frac{1}{x}$
   On a donc
   $$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$
2. La dernière inégalité appliquée à gauche pour $x = n$ permet d'obtenir l'inégalité à droite.
   En remplaçant $x = n-1$ on obtient l'inégalité à gauche.
   Donc
   $$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$$
3. $H_n = \sum_{k=n+1}^{k=n} \frac{1}{k+n}$
   On utilise les inégalités précédentes et on obtient :
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln(k-1))$$
   On sépare les sommes :
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k-1)$$
   On effectue un changement d'indices :
   $$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \ln(k) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - \sum_{k=n}^{2n-1} \ln k$$
   On simplifie les sommes :
   $$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+n} \leqslant \ln(2n) - \ln(n)$$
4. Or $\ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln(2) + \ln \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln 2$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2n) - \ln(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2 = \ln 2$
   D'après le théorème des gendarmes, on a
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \ln 2$
5. On peut obtenir une inégalité équivalente :
   $$\sum_{k=n+1}^{3n} (\ln(k+1) - \ln k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k+n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{3n} (\ln k - \ln(k-1))$$
   Donc
   $$\ln(3n+1) - \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+n} \leqslant \ln(3n) - \ln(n)$$
   Il vient alors
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} = \ln 3$$

Exercice 14

1. Soient $a_0, \ldots, a_n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$.
   Montrer que $\exists x \in]\,0,1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$.
   (On pourra considérer la fonction $f(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\Big)$.
2. Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes, montrer que P' en a au moins $n-1$.

Solution

1. On considère la fonction $f(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. f est une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0;1[$.
   On a $f(0) = a_0(0) + \frac{a_1}{2}(0) + \cdots + 0 = 0$.
   et $f(0) = a_0(1) + \frac{a_1}{2}(1) + \cdots + 1 = 0$
   Donc $f(0) = f(1) = 0$, par le théorème de Rolle : il existe un $x \in]0,1[$ tel que $f'(x) = 0$.
   Or
   $$f'(x) = a_0 + \frac{a_1}{2} \cdot (2x) + \cdots + \frac{a_n}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
   D'où le résultat.
2. Soit $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P.
   $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, sur l'intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, la fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$ est continue et dérivable et $f(\alpha_k) = f(\alpha_{k+1})] = 0$.
   On peut donc appliquer le théorème de Rolle donc il existe donc un réel $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(\alpha_k) = 0$.
   Donc il y a donc $n-1$ racines.

Exercice 15

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^n + ax + b$.

1. Montrer que le polynôme f admet au plus trois racines réelles.
2. Si n est pair. Montrer que le polynôme f admet au plus deux racines réelles.

Solution

1. Par l'absurde, supposons que P admet 4 racines réelles :
   $$x_0 < \ x_1 < \ x_2 < \ x_3$$
   Dans ce cas $n \ \geqslant 4$
   — Pour $k = 0$ *ou* $k = 1$ *ou* $k = 2$
     P est continue sur $[x_k; x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k; x_{k+1}[$ et $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ car les x_k sont des racines de P.
     On peut appliquer le théorème de Rolle donc P' admet 3 racines, $y_0, \ y_1, \ y_2$ avec
     $$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$$
   — Pour $k = 0$ *ou* $k = 1$
     P' est continue sur $[y_k; y_{k+1}]$, dérivable sur $]y_k; y_{k+1}[$ et $P'(y_k) = P'(y_{k+1}) = 0$ car les y_k sont des racines de P'
     On peut donc appliquer le théorème de Rolle donc P'' admet 2 racines $z_0, \ z_1$ et
     $$y_0 < z_0 < y_1 < z_1 < y_2$$
     Or $f(x) = x^n + ax + b$, donc $f'(x) = nx^{n-1} + a$ et $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$
     Or $f''(x)$ admet une seule racine qui est 0 ce qui est contradictoire avec l'existence de deux racines distinctes z_0 et z_1.
2. Si n est pair, alors $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} + a$ avec $n-2$ pair. Donc f' est strictement croissante. $f'(x) = nx^{n-1} + a$ avec $n-1$ impair. Donc $\lim\limits_{-\infty} f' = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$. Or f' est continue donc f' réalise une bijection sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule qu'une fois en une réel α.
   f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$
   Elle ne peut donc pas s'annuler 3 fois. Elle admet donc au plus 2 racines réelles.

Exercice 16 *Extension du théorème de Rolle*
Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
Solution
Si f est constante alors $f' = 0$, donc la conclusion est vérifiée. Sinon, soit $b \in]a; +\infty[, f(b) \neq f(a)$.
Alors, par continuité, il existe α dans $[a; b]$ antécédent de $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$, il existe $\beta \in]b; +\infty[$ antécédent de $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
On considère l'intervalle $[\alpha; \beta]$. La f est dérivable et continue sur $[\alpha; \beta]$ avec $f(\alpha) = f(\beta)$ donc, en appliquant le théorème de Rolle, il existe $c \in]\alpha; \beta[$ tel que $f'(c) = 0$.
Autre méthode
Une autre façon d'étendre le théorème est de considérer la fonction g définie sur $[0; a]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \text{ si } x > 0 \\ f(a) & : \text{si } x = 0 \end{cases}$$

on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$
Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(a) = g(a)$ donc g est continue en 0.
Par composition de la fonction inverse avec la fonction f, g est dérivable sur $]0; a[$.
on peut donc appliquer le théorème de Rolle à g donc il existe $c \in]0; a[$ tel que $g'(c) = 0$ donc $f'\left(\dfrac{1}{c}\right)(-\dfrac{1}{c^2}) = 0$
donc $f'\left(\dfrac{1}{c}\right)$ et $\dfrac{1}{c}$ est bien le réel de $]a; +\infty[$ recherché.

Exercice 17
Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ donner une expression de $c \in]a; b[$ en fonction de α, β et γ.
Donner une interprétation géométrique.
Solution

On calcule $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a)}{b-a} = \alpha(b+a)+\beta$
Or $f'(c) = 2\alpha c + \beta$.
donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow c = \dfrac{a+b}{2}$

Applications

Exercice 18
Considérons les deux courbes C_1 et C_2 définie par les équations $C_1 : y = x^2$ et $C_2 : y = \dfrac{1}{x}$

1. Déterminer les équations des droites tangentes à C_1 passant par le point de coordonnées (0, -1).
2. Déterminer les équations des droites tangentes à C_2 de pente -2.
3. Démontrer que les courbes de l'équation $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.
4. Démontrer que les courbes $C_3 : y = \sqrt[3]{3x}$ et C_2 admettent un point commun où la droite tangente à C_2 et la droite tangente à C_3 sont orthogonales. Déterminer ce point.
   Deux droites qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées sont orthogonale si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est -1

Solution

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 2x$.
   Soit a un réel. La tangente à la courbe C_1 au point d'abscisse a a pour équation
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = 2a(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$
   Cette tangente passe par le point de coordonnées (0 ;-1) si et seulement si $-1 = -a^2$ si et seulement si $a = 1$ ou $a = -1$
   Les équations des tangentes sont $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

   On cherche des coefficients égaux à 2 : $g'(a) = -2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} = -2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Les équations sont $y = -2\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}$ et $y = -2\left(x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}$

   C'est à dire $y = -2x + 2\sqrt{2}$ et $y = -2x - 2\sqrt{2}$

3. Soit a un réel non nul. La tangente à la courbe C_2 au point d'abscisse a a pour équation

$$y = g'(a)(x-a) + g(a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \Leftrightarrow y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

   C_1 et C_2 ont une tangente commune si et seulement si il existe a et b tels que

$$y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} \text{ et } y = 2bx - b^2 \text{ sont l'équation de la même droite}$$

   On résout : $\begin{cases} -\dfrac{1}{a^2} &= 2b \\ \dfrac{2}{a} &= -b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2b &= -1 \\ ab^2 &= -2 \end{cases}$

   On multiplie les deux équations et on obtient : $2a^2bab^2 = -2 \Leftrightarrow (ab)^3 = -1 \Leftrightarrow ab = -1$

   Il vient $b = -2$ et $a = -\dfrac{1}{2}$

   L'équation est alors : pour C_2 : $y = -4x - 4$ et pour C_1 : $y = -4x - 4$

   On a bien obtenu un tangente commune et c'est la seule possible.

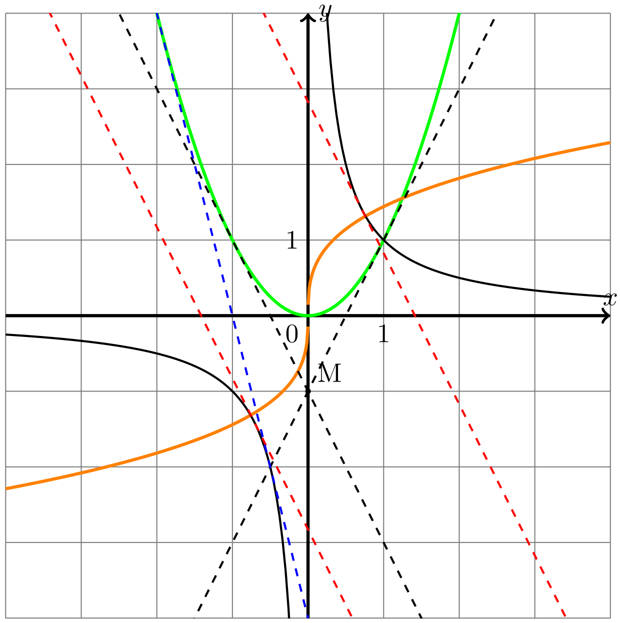
4. Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt[3]{3x}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $h'(x) = (3x)^{-\frac{2}{3}}$.

   On cherche les points d'intersection de C_2 et C_3. On résout :

$$\frac{1}{x} = \sqrt[3]{3x} \Leftrightarrow 1 = x^3 \times 3x \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{4}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}$$

   Au point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, $g'(x) = -\sqrt{3}$ et $h'(x) = \left(3(3^{-\frac{1}{4}})\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   On a bien $g'(x)h'(x) = -1$ donc les tangentes sont perpendiculaires.



Exercice 19

On considère $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction cube : $x \mapsto x^3$.

1. Déterminer l'équation réduite de la courbe passant par le point B de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.5 et démontrer que $A(-5; -4)$ appartient à cette tangente.
2. Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Démontrer que l'équation de la tangente est $2a^3 - 3a^2x + y = 0$.
3. En déduire qu'il existe deux tangentes à $\mathscr{C}$ qui passent par A.
4. ** Déterminer les régions du plan où l'on peut faire passer une, deux, trois ou aucune tangente.

Solution

---

1. On a $f'(0.5) = 3()^2 = \frac{3}{4}\ f(0.5) = \frac{1}{8}$

   Donc l'équation de la tangente est $y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}$
   $$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$
   On calcule :
   $\frac{3}{4}(-5) - \frac{1}{4} = \frac{-15-1}{4} = -4$
   Donc B appartient à la tangente.
2. $M(a, a^3)$ donc l'équation de la tangente T_a en a est $y = 3a^2(x-a) + a^3$
   Donc
   $$y = 3a^2x - 2a^3$$
   $B \in T_a \Leftrightarrow -4 = 3a^2(-5) - 2a^3 \Leftrightarrow 2a^3 + 15a^2 - 4 = 0$
   On sait que $a = \frac{1}{2}$ est solution de cette équation car on a vu que $T_{\frac{1}{2}}$ contient B.
   On factorise donc par $a - \frac{1}{2}$ ou bien $2a - 1$.
   On obtient $2a^3 + 15a^2 - 4 = (2a-1)(a^2 + 8a + 4)$
   On résout $a^2 + 8a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a+4)^2 - 12 = 0$
   $a_2 = -4 + 2\sqrt{3}$ et $a_3 = -4 - 2\sqrt{3}$
   $3a_2^2 = 84 - 48\sqrt{3}$ et $2a_2^3 = 240\sqrt{3} - 416$
   $3a_3^2 = 84 + 48\sqrt{3}$ et $2a_3^3 = -240\sqrt{3} - 416$
   Les équations des deux autres tangentes sont donc :
   $y = (84 - 48\sqrt{3})x - 240\sqrt{3} + 416$
   et $y = (84 + 48\sqrt{3})x + 240\sqrt{3} + 416$

Exercice 20

Soient $n \geq 2$ et $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par
$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer sa valeur ?
3. En déduire les inégalités suivantes :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ (1+x)^n \leq 2^{n-1}\left(1+x^n\right),$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 (y+x)^n \leq 2^{n-1}\left(y^n + x^n\right).$$

Solution

1. f est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule par sur $\mathbb{R}^+$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   $f'(x) = \frac{n(1+x)^n nx^{n-1} - (1+x^n)\, n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}$
   $= \frac{(1+x)^n nx^{n-1} - (1+x^n)\, n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}$
   $= \frac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1}(1+x) - (1+x^n)\right)}{(1+x)^{2n}}$
   $= \frac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1} + x^n - 1 - x^n\right)}{(1+x)^{2n}}$
   $= \frac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1} + x^n - 1 - x^n\right)}{(1+x)^{2n}}$
   $= \frac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1} - 1\right)}{(1+x)^{2n}}$

2. $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1}-1$. Or la fonction $x \mapsto x^{n-1}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective et 1 est solution de l'équation donc $f'(x)<0$ pour $x \in [0;1[$ et f est strictement décroissante et pour $x \in]1;+\infty[$, $f'(x)>0$ et f est strictement croissante. Donc f admet un minimum en 1. Or $f(1)=\dfrac{2}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 1+x^n \geqslant \dfrac{(1+x)^n}{2^{n-1}} \Leftrightarrow (1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$
   or $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^2*, \dfrac{y}{x}>0$ donc
   $$\left(1+\frac{y}{x}\right)^n \leqslant 2^{n-1}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)$$
   En multipliant par x^n, on obtient
   $$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}\left(x^n+y^n\right)$$
   et cette propriété est vraie pour $x=0$ ou $y=0$

Exercice 21 *Tech* $\circ$
Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes :
1. $f_1(x)=x^2+5x+6, \quad x \in [-4,4]$.
2. $f_2(x)=x^3-3x^2-x+10, \quad x \in [0,3]$.
3. $f_3(x)=-2\cos x-x, \quad x \in [0,4\pi]$.

Solution
1. $f_1(x)=x^2+5x+6 \qquad\qquad x \in [-4,4]$
   $f_1'(x)=2x+5 \ \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

x	-4		$-\frac{5}{2}$		4
f'		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	42

   $f(-4)=(-4)^2 + 5(-4) + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$
   $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5\left(-\dfrac{5}{2}\right) + 6 = \dfrac{25 - 50 - 24}{4} = -\dfrac{1}{4}$
   $f(4)=(4)^2 + 5(4) + 6 = 16 + 20 + 6 = 42$
   Donc les extremums sont 42 et -14
2. $f_2(x)=x^3-3x^2- x+10 \qquad\qquad x \in [0,3]$
   $f_2'(x)=3x^2- 6x -1$
   $\Delta = (-6)^2 + 4\times 3\times 1=48=\left(4\sqrt{3}\right)^2$
   $x_1=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3} \notin [0,3]$
   $x_2=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$

x	0		$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$		3
f'		$-$	0	$+$	
f	10	$\searrow$	$\frac{63 - 16\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	7

$f_2(0) = \ 0 \ - \ 0 \ - \ 0 \ + 10 = \ 10$

$f_2(3) = \ 3^3 \ - \ 3x3^2 \ - \ 3 \ \ + 10 = \ 7$

$f_2\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3} - 10 = \dfrac{63 \ - \ 16\sqrt{3}}{9}$

Donc les extremums sont 10 et $\dfrac{63 \ - \ 16\sqrt{3}}{9}$

3. $f_3(x) = -2\cos(x) \ - \ x \qquad x \in [0, 4\pi]$

   $f_3'(x) = 2\sin(x) - 1$

   $f_3'(x) \geqslant 0 \iff 2\sin x - 1 \geqslant 0 \iff \sin x \geqslant \dfrac{1}{2} \iff \sin x \geqslant \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{13\pi}{6}; \dfrac{17\pi}{6}\right]$

   On a donc le tableau de variations suivant :

   La fonction f_3 est donc croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\dfrac{13\pi}{6}; \dfrac{17\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}\right]$ et $\left[\dfrac{17\pi}{6}; 4\pi\right]$

   Elle admet donc deux maximums locaux en $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{17\pi}{6}$

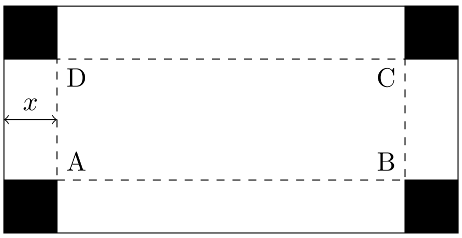
   $f_3\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) - \dfrac{5\pi}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{5\pi}{6}$

   $f_3\left(\dfrac{17\pi}{6}\right) = -2\cos\left(\dfrac{17\pi}{6}\right) - \dfrac{17\pi}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{17\pi}{6}$

   Donc le maximum est $\sqrt{3} - \dfrac{5\pi}{6}$

Exercice 22 ○

On dispose une feuille de carton rectangulaire, de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux, aux quatre coins (voir la figure), puis on plie le carton suivant les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. On appelle x la mesure en cm de côté de chaque carré découpé.



1. Préciser entre quelles valeurs peut varier x pour que la boite soit réalisable. On obtiendra un intervalle I. Déterminer le volume de la boite obtenue en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction volume sur I, et en déduire la valeur de x qui rend le volume de la boite maximum. Quels sont alors les dimensions et le volume de la boite obtenue ?

Solution

1. La valeur de x doit être positive et $2x$ ne peut pas excéder 50 sinon la boite n'a plus de fond. Donc $x \in [0; 25]$.

   L'aire de la base de ce parallélépipède est

   $$\mathscr{A} = (80 - 2x)(50 - 2x)$$

   La hauteur étant x, le volume est

   $$\mathscr{V}(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$$

2. On développe $\mathscr{V}$ pour ensuite dériver cette fonction polynôme (qui est donc dérivable sur I en tant que polynôme).

   $\mathscr{V} = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$

   $\forall x \in I, \mathscr{V}'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 400(3\left(\dfrac{x}{10}\right)^2 - 13\left(\dfrac{x}{10}\right) + 10)$

   On recherche le signe de la fonction polynôme $3\left(\dfrac{x}{10}\right)^2 - 13\left(\dfrac{x}{10}\right) + 10$.

   $\Delta = 13^2 - 4(3)10 = 169 - 120 = 49 = 7^2$

   Donc $\dfrac{x_1}{10} = \dfrac{13+7}{6}$ donc $x_1 = \dfrac{100}{3}$

et $\dfrac{x_2}{10} = \dfrac{13-7}{6}$ donc $x_2 = 10$

Le signe de $3\left(\dfrac{x}{10}\right)^2 - 13\left(\dfrac{x}{10}\right) + 10.$ est donc positif sur $]0;10[$ et négatif sur $]10;25]$

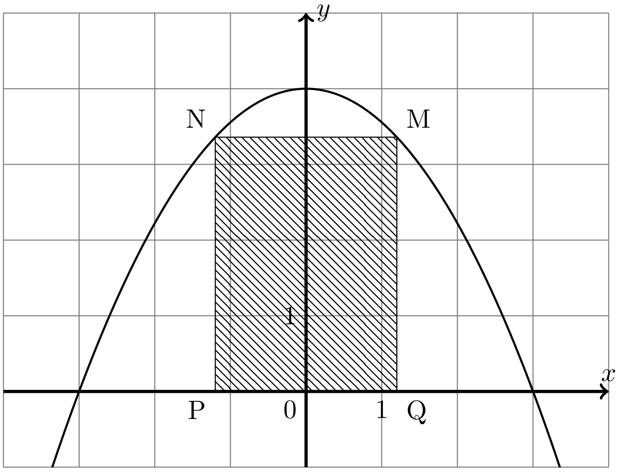
Le maximum de $\mathscr{V}$ est donc atteint pour $x = 10$.

On obtient alors une boite de base 30×60 et de hauteur 10 c'est à dire un volume de 18000

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $I = [-3, 3]$ par $f(x) = -\dfrac{4}{9}x^2 + 4$.
On note $\mathscr{P}$ la courbe représentative de f.
Soit $x \in I$, on définit $M(x, y)$ et $N(-x, y)$ deux points de $\mathscr{P}$ et les points $P(-x, 0)$ et $Q(x, 0)$.
Soit A l'aire du rectangle MNPQ.

1. Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x, et exprimer A en fonction de x.
2. Etudier les variations de A en fonction de x, et déterminer les dimensions du rectangle lorsque celui-ci a une aire maximale.



Solution

1. La valeur x peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0;3]$. L'aire du rectangle MNPQ vaut :
$$A(x) = PQ \times MQ = 2xf(x) = -\frac{8}{9}x^3 + 8x$$
2. La fonction A est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $[0;3]$.
$A'(x) = -\dfrac{8}{3}x^2 + 4 = 8\left(1 - \dfrac{x^2}{3}\right)$
Sur $[0;3]$, $A'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{3}$
La fonction A est donc croissante sur $[0;\sqrt{3}]$ et décroissante sur $[\sqrt{3};3]$. Elle atteint donc un maximum en $x = \sqrt{3}$. Ce maximum est alors $A(\sqrt{3}) = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. La largeur du rectangle est alors $2\sqrt{3}$ et la hauteur $\dfrac{8}{3}$.

Pour s'entraîner

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{5x^3 - x^4}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 4x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3 - 3x + 2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x \ln(1-x). \lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Exercice 25 ** Tech*

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=x^{\frac{3}{2}}e^{x^2},\quad f_2(x)=\frac{\sin\left(2x^2\right)}{x^2+3},\quad f_3(x)=\sin\left(\cos\left((3x-2)^2\right)\right),\quad f_4(x)=\frac{2}{\tan(2x+1)},$$
$$f_5(x)=\sin\left(x^8+5x^2\right),\quad f_6(x)=e^x\sin(5x),\quad f_7(x)=e^x\ln(\ln(\ln(x))),$$
$$f_8(x)=\sin\left(\frac{x^2}{\cos\left(x^2\right)+x^3}\right).$$

Exercice 26

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

Solution

- On définit la propriété $\forall n\in\mathbb{N}, P_n:\left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$
- Pour $n=0$, on a $(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{(-1)^{0+1}}{x^{0+2}}e^{\frac{1}{x}}$ Donc P_0 est vrai.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose P_n

$\left(x^{n+1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+2)}=\left(x\left(x^{n+1}e^{\frac{1}{x}}\right)\right)^{(n+2)}=\sum_{k=0}\binom{n+2}{k}x^{(k)}\left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+2-k)}$

$=\binom{n+2}{0}x\left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{n+2}+\binom{n+2}{1}\left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}$ on utilise la relation de récurrence :

$=(-1)^{n+1}x\left(\frac{x^{n+2}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-(n+2)x^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{x^{2n+4}}\right)+(n+2)\frac{(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$

$=(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}\frac{-x-(n+2)x^2+(n+2)x^2}{x^{n+4}}=(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}\frac{-x}{x^{n+4}}=(-1)^{n+2}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^{n+3}}$

Donc P_{n+1} est vraie

- Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(x^ne^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}=\frac{(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}$

Exercice 27

Prolonger par continuité en a et étudier la dérivabilté et la continuité de la dérivée (et si la fonction est de classe C^1 ou non) de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\frac{e^{2x}-1}{x},\quad a=0\quad;\quad f_2(x)=x\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad a=0$$
$$f_3(x)=\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1},\quad a=1\quad;\quad f_4(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right),\quad a=0$$
$$f_5(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}},\quad a=0.$$

Exercice 28

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x)=\begin{cases}0 & : \text{si } x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & : \text{si } x>0\end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et que $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x}}P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ où $P_n\in\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29

1. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction $\ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer le plus grand entier $n\in\mathbb{N}$ tel que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^3\ln|x| & : \text{si } x\le 0\\ 0 & : \text{si } x>0\end{cases}$$

Solution

(a) Soit la fonction $g(x)=\ln|x|$. Si $x>0$, $g(x)=\ln x$ donc $g'(x)=\frac{1}{x}$

Si $x<0$, $g(x)=\ln(-x)$ donc $g'(x)=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$.

Dans tous les cas, $g'(x)=\frac{1}{x}$

(b) Pour $x<0$, $f(x)=x^3\ln(-x)$.
La fonction est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

i. On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x = 0$. Donc la fonction f est continue en 0 (car elle est nulle à droite).
On a $\dfrac{x^3\ln -x - 0}{x-0} = x^2\ln -x \underset{x\to 0}{\to} 0$. Donc f est dérivable en 0.
$\forall x \in \mathbb{R}^-, f'(x) = 3x^2\ln(-x) + x^3\dfrac{1}{x} = 3x^2\ln(-x) + x^2$
On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. Donc la fonction f' est continue en 0 (car elle est nulle à droite).
Donc la fonction f est de classe C^1.

ii. $\dfrac{3x^2\ln -x - 0}{x-0} = 3x\ln -x \underset{x\to 0}{\to} 0$ (on calculé le taux pour la seulle partie de f' qui pourrait poser un problème). Donc f' est dérivable en 0.
$\forall x \in \mathbb{R}^-, f''(x) = 6x\ln(-x) + 5x$.
On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = 0$. Donc la fonction f'' est continue en 0 (car elle est nulle à droite).
Donc la fonction f est de classe C^2.

iii. $\dfrac{6x\ln -x - 0}{x-0} = 6\ln -x \underset{x\to 0}{\to} -\infty$. Donc f''' n'est pas dérivable en 0.

La fonction est donc de classe C^2 et pas de classe C^3. L'entier n est 2

Exercice 30

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
2. On pose
$$v_n = 8n + 4 - 8\sqrt{n(n+1)}$$
Montrer que :
$$\frac{1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{1}{n}$$
En déduire que v_n converge et déterminer sa limite.

Autres exercices

Exercice 31 *Injectivité locale*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V\backslash\{a\}, f(x) \neq f(a)$.
2. Si f' est continue au point a, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|V}$ soit injective.

Exercice 32 *Propriétés de parité et de périodicité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) \neq f(0)$, alors f n'a pas de période (on étudiera $f(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 33
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$ s'annulant en $n+1$ points distincts de $]a, b[$.
On suppose donc qu'il existe $(n+1)$ éléments de $]a, b[$, notés : $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < ... < x_n^{(0)}$, qui vérifient : $f(x_0^{(0)}) = f(x_1^{(0)}) = ... = f(x_n^{(0)}) = 0$.

1. Montrer, par récurrence sur k que : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, il existe $(n-k+1)$ éléments de $]a, b[$, notés $x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < ... < x_{n-k}^{(k)}$ qui vérifient : $f^{(k)}(x_0^{(k)}) = f^{(k)}(x_1^{(k)}) = ... = f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$.
2. Que pouvez vous en déduire concernant l'existence de zéros éventuels de $f^{(n)}$ sur $]a, b[$?

Exercice 34
Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui possède un unique point fixe ω tel que $f(\omega) = \omega$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0 et la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que si $|f'(\omega)| < 1$, alors $\exists \alpha > 0, \exists k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1, \forall x \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[,\ \ \dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} < k$.
2. En déduire, par récurrence, que si $x_0 \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |f(x_n) - f(\omega)| \leq k^n|x_0 - \omega|$.

3. Conclure quant à la convergence vers w.
4. On suppose maintenant que $|f'(\omega)| > 1$ et on va montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si et seulement si elle est stationnaire (i.e. $x_n = \omega$ à partir d'un certain rang).

   Montrer que $\exists\alpha > 0, \exists k > 1, \forall x \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[, \quad \dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} > k.$
5. Supposons donc, par l'absurde, que : $\forall n, x_n \neq \omega$ (non stationnaire), et que $\lim u_n = \omega$.

   (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang N, on aura : $x_n \in]\omega - \alpha, \omega + \alpha[$,

   (b) En déduire, par récurrence, que : $\forall n \geq N, \ \ |f(x_n) - f(\omega)| \geq k^{n-N}|x_N - \omega|$ et obtenez la contradiction souhaitée.
6. Que dire dans le cas $|f'(\omega)| = 1$?

   On pourra étudier la suite définie à l'aide de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$, avec $x_0 = 0$ puis avec $x_0 = 2$.

Solution

1. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable en ω donc

   $\forall\epsilon > 0, \exists\alpha > 0, |x - \omega| < \alpha, |\dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} - f'(\omega)| < \epsilon$

   On a pour $\epsilon = \dfrac{1 - f'(\omega)}{2}$

   $\forall x, |x - \omega| < \alpha,$

   $|\dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega}| < |\dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega} - f'(\omega)| + |f'(\omega)| < \dfrac{1 - f'(\omega)}{2} + |f'(\omega)| \leq \dfrac{1 + f'(\omega)}{2}$

   On pose $k = \dfrac{1 + f'(\omega)}{2}$ qui répond à la question.
2. D'après la question précédente,

   $\forall x \in]\omega - \alpha; \omega + \alpha[, |\dfrac{f(x) - f(\omega)}{x - \omega}| < k$ donc $f(x) - f(\omega) < k(x - \omega)$

   On construire un raisonnement par récurrence :

   On prouve la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : |f(x_n) - f(\omega)| < k^n|x_0 - \omega)$

   On a $|f(x_0) - f(\omega)| < k|x_0 - \omega|$

Exercice 35

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]\,a, b[$ tel que $f''(c) = f'(c)$.

Classification des exercices :

Tech : techniques à maîtriser.

** difficile