TD 1 Séries Numériques

Exercice 1

Soit $(S_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la suite $(u_n)_n$. On sait que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ converge. Or

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = \sum_{k=1}^{n} v_k - v_{k-1} = v_n - v_0$$

donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_n$ converge.
Par suite la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite v_n converge.

Exercice 2

1/ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$ soit $u_n = \frac{1}{1+2+\dots+n}$

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k} \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{n} k = n.\frac{(n+1)}{2}.$$

$$\text{donc} \quad u_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$$
$$= -2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ on a : $S_n = -2.(v_{n+1} - v_1)$

avec $v_n = \frac{1}{n}$. ; on a $(v_n)_n$ CV vers 0

la suite $(S_n)_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$.

d'où $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et sa valeur est 2.

2/ $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

$= \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}\right) + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - 1\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{2}\right)$

on a : $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite convergente, donc

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et par suite $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

converge.

$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\dfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} - 1\right) + \dfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

d'où $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$

3/ $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

$= 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$

$= (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$

$$- \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1) \right)$$

$$\Rightarrow S_n = \ln(n+1) - \ln(1) - \left(\ln(n+2) - \ln(2) \right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(1) = 0.$$

donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$

par suite $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ est une série convergente et sa valeur est égale à $\ln(2)$

4/ $u_n = \dfrac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1} \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} u_{2n} + \sum_{n \geq 0} u_{2n+1}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^{2n}} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2)^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{16}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

- La série $\sum\limits_{n \geq 0} \left(\frac{1}{16}\right)^n$ est géométrique de raison : $q = \frac{1}{16}$ avec $|q| < 1$, alors elle converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{16}}$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est géométrique de raison

$q = \frac{1}{4}$ avec $|q| < 1$, donc elle converge

et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est la somme de deux séries

convergentes, donc elle converge, de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{16}{15} + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{4}^{2}}{3} = \frac{16+10}{15} = \frac{26}{15} = \boxed{\cancel{\frac{2}{5}}}$$

Exercice 3

$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs positives

$\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes

a) Etudions la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$

avec $w_n = \sqrt{u_n \cdot v_n}$

$$0 \leqslant \sqrt{u_n}\cdot\sqrt{v_n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \left(\sqrt{v_n}\right)^2\right) \qquad (a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + v_n\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n$$

On a : $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge donc $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge donc $\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. Par suite la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n\right)$ est la somme de deux séries convergentes donc elle converge.

D'après le critère de comparaison des séries de termes positifs la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.

b) $t_n = \frac{1}{n}\sqrt{u_n} = \sqrt{\frac{1}{n^2} u_n}$

or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

On a : $t_n = \sqrt{u_n v_n}$ avec $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n = \frac{1}{n^2}$ sont deux séries convergentes.

d'après a) $\sum_{n\geq 1} t_n$ est une série convergente

Exercice 4

Exercice 3.

On considère les deux séries convergentes à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$.

Etudions la convergence de la série $w_n = \sqrt{u_n v_n}$.

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

en particulier pour $a = \sqrt{u_n}$, $b = \sqrt{v_n}$

on a : $\underbrace{\sqrt{u_n v_n}}_{=} \leq \frac{1}{2}\left((\sqrt{u_n})^2 + (\sqrt{v_n})^2\right)$

$$\Rightarrow 0 \leq w_n \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

La somme de deux séries convergentes est une série convergente

on a : $\left.\begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ converge.

d'après le Théorème de majoration des séries numériques à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est une série convergente.

Remarque

si $\left.\begin{array}{l}\sum u_n \text{ cv} \\ \sum v_n \text{ cv}\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum (u_n + v_n)$ converge

$\not\Longleftarrow$ $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{-1}{n}$

$u_n + v_n = 0$ et $\underbrace{\sum_{n\geq 0} u_n + v_n = 0}_{\text{converge}}$

mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n}$ diverge.

(b) Etudions la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$.

Il s'agit d'une application de a)

Il suffit de prendre $\sqrt{v_n} = \frac{1}{n}$, c à d il suffit de prendre $v_n = \frac{1}{n^2}$

on a : • $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

• $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série convergente (énoncé)

d'après (a) la série de terme général $w_n = \sqrt{u_n} \cdot \sqrt{v_n} = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$ est une série convergente

Remarque

$t_n = \frac{1}{n}\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_n} \quad \forall\, n \geq 1.$ (vrai)

⚠ . Dans le cas général $\sqrt{x} \leq x$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.
et $\sqrt{x} \geq x \quad \forall\, x \in [0,1]$.

⚠ $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série convergente

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, ce qui implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall\, n \geq N ; 0 < u_n < 1$

donc on n'a pas $\sqrt{u_n} \leq u_n$

⚠ Dans le cas général si $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV $\cancel{\Longrightarrow}$ $\sum_{n \geq 0} \sqrt{u_n}$ CV

← n'est pas tjrs vrai

Exemple : 1) $u_n = \frac{1}{n^2}$

on a : $\sum_{n\geq 1} u_n$ cv et $\sum_{n\geq 1} \sqrt{u_n}$ diverge.

2) $u_n = \frac{1}{n^4}$

$\sum_{n\geq 1} u_n$ cv et $\sum_{n\geq 1} \sqrt{u_n}$ cv

Autre méthode pour la première et la deuxième question

Rq on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$

$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Les suites des sommes partielles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes car les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent.

on a : $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sqrt{u_k . v_k}}_{= w_k} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}}_{\sqrt{U_n}} . \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k}$

$\sqrt{U_n} \cdot \sqrt{V_n}$

on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

on a : $0 \leqslant S_n \leqslant \underbrace{\sqrt{U_n} \cdot \sqrt{V_n}}$

$$\downarrow n \to +\infty$$

$\sqrt{\ell_1} \cdot \sqrt{\ell_2}$ avec $\ell_1 = \lim_{n \to +\infty} U_n$

$\ell_2 = \lim_{n \to +\infty} V_n$

donc la suite $(S_n)_n$ est convergente et par suite la série $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ est convergente.

Exercice 4

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série à termes positifs

(1) $v_n = \dfrac{u_n}{1 + n^2 u_n}$

Montrons que la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge.

Si $u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} v_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$

on a: $1 + n^2 u_n \geq n^2 u_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2 u_n}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+n^2 u_n} \leq \frac{u_n}{n^2 u_n} = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann

avec $\alpha = 2 > 1$). D'après le Théorème de majoration

des séries numériques à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$

converge.

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Montrons que $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

$\boxed{\Leftarrow}$ supposons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

on a: $\forall n \geq 0$, $u_n \geq 0 \Rightarrow \forall n \geq 0$ $1+u_n \geq 1$

$$\forall\, n \geq 0, \quad \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geq 0 \quad \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geq 0, \quad 0 \leq v_n \leq u_n$$

puisque $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge, d'après le Théorème de majoration des séries numériques à termes positifs la série $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge.

$\boxed{\Longrightarrow}$ supposons que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge.

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Rightarrow u_n = v_n + v_n \cdot u_n$$

$$\Rightarrow (1 - v_n)\, u_n = v_n$$

on a: $v_n \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + u_n > u_n \Rightarrow \frac{1}{1+u_n} < \frac{1}{u_n}$

$\Rightarrow v_n < 1$

$\Rightarrow v_n \neq 1$

$$(1 - v_n)\, u_n = v_n \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$$

on sait $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ est une série convergente, donc son terme général ϑ_n tend vers 0.

donc, il existe un rang N ; $\forall n \geq N$, $\vartheta_n < \frac{1}{2}$

donc $\forall n \geq N$, $1 - \vartheta_n \geq 1 - 1/2 = 1/2$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \quad \frac{1}{1-\vartheta_n} \leq 2.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \quad u_n = \frac{\vartheta_n}{1-\vartheta_n} \leq 2\,\vartheta_n$$

or $\sum\limits_{n\geq 0} \vartheta_n$ converge $\Rightarrow 2\sum\limits_{n\geq 0} \vartheta_n$ converge

donc d'après le théorème de majoration, la série $\sum\limits_{n\geq N} u_n$ converge, d'où la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} u_k}_{\in \mathbb{R} \text{ somme finie}} + \sum_{n\geq N} u_n$$

deux séries de même nature de converge

2/ On considères $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} \vartheta_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$

trois séries à termes positifs convergentes

Déterminons la nature de convergence de la série de terme général

$$z_n = \sqrt{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}$$

$$(u_n + v_n + w_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 + 2(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}_{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(u_n+v_n+w_n)^2}_{B} \boxed{- \underbrace{\frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2 + w_n^2)}_{+C}} \leq 0$$

$$A = \underset{\geq 0}{B} - C \geq 0 \leq B$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n + w_n)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(u_n+v_n+w_n)^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq z_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n + v_n + w_n)$$

or la somme des séries convergente est une série convergente donc la série de terme général $u_n + v_n + w_n$ converge. Par suite

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n + w_n) \text{ converge.}$$

d'après le théorème de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge.

TD 1

Exercice 5

Etude de convergence d'une série numérique à termes positifs.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

- $l \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement
- $l = 0$

on utilise une méthode pour montrer la CV ou la dV

- (1) Th équivalence
- (2) Th de comparaison
- série de Riemann
- série de Bertrand
- série géométrique
- série télescopique
- règle de D'Alembert
- Lemme de Riemann
- Règle de Cauchy

1/ $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq 0$

donc $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement

2/ $$u_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

$$= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$$

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

3/ $$\overset{0 \leq}{u_n} = \frac{1}{\ln(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} = v_n^{\to 0}$$

v_n le terme général d'une série de Bertrand $\underbrace{\alpha = 0}$ et $\beta = 1$

($\text{cas } \alpha < 1$)

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$$

d'après le lemme de Riemann ($\alpha \leq 1$)

la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge, en appliquant le Th des équivalences la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\ln(n+1)}$ diverge.

$\dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}$

4/ $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

le terme général d'une série de Bertrand

$(\underbrace{\alpha = 2}_{\alpha > 1}, \quad \beta = -1)$

on pose $\gamma = \dfrac{\alpha+1}{2} = \dfrac{3}{2}$

montrons que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} n^{3/2} \cdot \frac{\ln(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2}}$$

$$= 0$$

donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

on a : $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

5/ $u_n = \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}\ln(2)}$

• $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}} = e^{\sqrt{n}\ln(2) - \sqrt{n+1}\ln(2)}$

$= e^{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})\ln(2)}$

$$= e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$ il faut changer la méthode

- $$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$e^{-\sqrt{n}\ln(2)} \geqslant e^{-n\ln(2)}$$

- $$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}\ln(2)}$$

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n)} \cdot e^{-\sqrt{n}\ln(2)}$$

$$= e^{\ln(n)\left(2 - \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}\ln(2)\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après le lemme de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

6) $u_n = \dfrac{\overset{0<}{n} + \sqrt{n}}{2n^3 - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2n^3} = \dfrac{1}{2n^2} \to 0$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

$(\alpha = 2 > 1)$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ converge

on applique le Th des équivalences des séries à termes positifs, on déduit la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

7) $u_n = \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ $\qquad \sin 1/n = 1/n + o(1/n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ car

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} \in \left]0, \pi/2\right]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

$0 < u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n}\right)^3$ La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann $\alpha = 3 > 1$)

d'après le Th des équivalences $\sum_{n\geq 1} u_n$ cv

8/ $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{(\ln(n))^n} = \dfrac{n\ln(n)}{e^{n\ln(\ln(n))}}$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{(n\ln(n))^{1/n}}{\ln(n)} = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(n\ln(n))}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

d'après la règle de Cauchy $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge

9/ $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n\left(\frac{1}{n}+o(1/n)\right)}$$

$$= e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

10/ $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1$$

Q9

d'après la règle de Cauchy $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

11/ $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$

$$= \frac{e^{-(2n-1)\ln(2)}}{(2n-1)}$$

$$n^2 u_n = \frac{n^2}{2n-1} \cdot e^{-(2n-1)\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après le lemme de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

12/ $u_n = \dfrac{\overbrace{(n+1)\cdot\cdot\cdot\cdot(2n-1)(2n)}^{=\frac{(2n)!}{n!}}}{(2n)^n}$

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n\, n^n \cdot n!} \qquad u_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\,(n+1)^{n+1}(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{\cancel{2^{n+1}}\,(n+1)^{n+1}\,(n+1)!} \cdot \frac{\cancel{2^n}\, n^n\, n!}{(2n)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\overbrace{(2n+2)}^{\cancel{2}(n+\cancel{1})}(2n+1)\cancel{(2n)!}\, n^n\, \cancel{n!}}{\cancel{2}(n+\cancel{1})(n+1)^n (n+1)\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e^{-1} < 1$$

d'après la règle de D'Alembert $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

13/ $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\qquad u_{n+1} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$

$$= \frac{(n+1)^2(n!)^2}{2(n+1)(2n+1)(2n)!}$$

$$= \frac{(n+1)(n!)^2}{2(2n+1)(2n)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(\cancel{n!})^2}{2(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1$$

d'après la règle de D'Alembert la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

14/ $a > 0$ $\quad u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{\cancel{n+1}}}{\cancel{a^n}} \cdot \frac{\cancel{(1+a)}\cdots\cancel{(1+a^n)}}{\cancel{(1+a)}\cdots\cancel{(1+a^n)}(1+a^{n+1})}$$

$$= \frac{a}{1+a^{n+1}}$$

1^er^ cas si $a = 1$ $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$

d'après la règle de D'Alembert

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

2^ième^ cas : si $0 < a < 1$ on a : $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = a < 1$$

d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

3^ième^ cas $a > 1$ on a : $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = 0 < 1$$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, d'après

la règle de D'Alembert $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge

Conclusion

$\forall a > 0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

15/ $0 \leq u_n = \frac{n^2}{2^n + n} = \frac{n^2}{e^{n\ln(2)} + n} \underset{+\infty}{\sim} v_n = \frac{n^2}{2^n} \to 0$

$$n^2 v_n = n^4 e^{-n\ln(2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on a : $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge (de la règle de Riemann $\alpha = 2 > 1$)

d'après le Théorème des équivalence des séries numérique à termes positifs , la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

16/ $u_n = n^{1/n} - (n+1)^{1/n}$

$= n^{1/n}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

$= n^{\frac{1}{n}}\left(1 - e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$

$= n^{\frac{1}{n}}\left(1 - e^{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right)$

$= n^{\frac{1}{n}}\left(1 - e^{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)$

$= n^{\frac{1}{n}}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} + \frac{1}{n^2} + o\left(1/n^2\right)\right)\right)$

$= + n^{1/n}\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$x \to 0$

$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(n)}}{n^2}$ Rq $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$

$e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$

$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$

$$\overbrace{u_n}^{<0} \underset{+\infty}{\sim} \overbrace{-\frac{1}{n^2}}^{<0} \iff \overbrace{-u_n}^{>0} \underset{+\infty}{\sim} \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{>0}$$

← garde un signe constant

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

converge $(\alpha = 2 > 1)$, donc

la série $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{n^2}$ converge

d'après le Th des equivalences

la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

17/ $u_n = \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

$$n^2 u_n = n^2 \ln(n) e^{-n\ln(2)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$$

d'après la lemme de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) la série $\sum_{n \geq 1} u_n$

converge.

18) $$u_n = \frac{n\sqrt{n}}{2^n + \sqrt{n}}$$

$$2^n + \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} 2^n \quad \text{car} \quad \frac{e^{n\ln(2)}}{e^{\frac{1}{2}\ln(n)}}$$

$$= e^{n\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(n)}$$

$$= e^{n\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$0 \leq u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n = \frac{n^{3/2}}{2^n} \geq 0$$

$$n^2 v_n = n^{7/2} e^{-n\ln(2)} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

d'où d'après le lemme de Riemann $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, en appliquant le Th des équivalences la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice 7

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

$$= \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(1 + a\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + b\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} - \frac{1}{8}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$u_n = \sqrt{n}\left[(1+a+b) + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{n}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{-a}{8} - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o(1/n^2)\right]$$

1^{ier} cas si $1+a+b \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (1+a+b)\sqrt{n} = \pm\infty$$

On a : $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

$2^{ième}$ cas $a+b+1=0$ càd $b=-1-a$

$$u_n = \sqrt{n}\left(\left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{n} + \left(-\frac{a}{8}-\frac{b}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \left(-1-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

i) si $-1-\frac{a}{2} \neq 0$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(-1-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$

donc $\sum_{n\geq 1} \left(-1-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, ce qui implique en utilisant le Th des équivalences des séries à termes positifs (à termes constants) la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$

ii) $-1-\frac{a}{2}=0 \iff a=-2$

$b=-1-a=1$

$$u_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} \overbrace{-\frac{1}{4}\,\frac{1}{n^{3/2}}}^{<0}$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($\alpha=3/2>1$), donc $\sum_{n\geq 1}-\frac{1}{4}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge

d'après le Th des équivalences des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Conclusion

$\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Longrightarrow a=-2$ et $b=1$

déterminons la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

avec $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$= -\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) + \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} -\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right)$$

$$= -\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{0}\right) + \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{1}\right)$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1 = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - 1$$

$$= \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - 1$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = -1$.

Exercice 6

$P \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+P)!}$$

1/ $p = 0$

Montrons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement

$\Updownarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$$

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots (n-1)! + n!}{n!}$$

$$= \underbrace{\frac{1!}{n!}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{2!}{n!}}_{\geq 0} + \cdots \underbrace{\frac{(n-1)!}{n!}}_{\geq 0} + 1$$

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} u_n \geq 1$

d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, par suite la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

2/ $p \geq 3$ $\quad p \geq 3 \Rightarrow (n+p)! \geq (n+3)!$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+p)!} \leq \frac{1}{(n+3)!}$$

$$u_n \leq \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+3)!}$$

$$1! + 2! + \cdots + n! = \sum_{k=1}^{n} k!$$

$\forall\ 1 \leq k \leq n, \quad k! \leq n!$ $\quad$ nbre de termes

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k! \leq \sum_{k=1}^{n} n! = n \cdot n!$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{n \cdot n!}{(n+3)!} = \boxed{\frac{n}{(n+3)(n+2)(n+1)}} = v_n$$

$$0 \leq v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n \cdot n \cdot n} = \frac{1}{n^2} \geq 0$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge $(\alpha = 2 > 1)$

d'après le th des équivalences des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

En appliquant le Th. de majoration des séries numérique à termes positifs, on déduit la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

3/ $p = 1$.

$$u_n = \frac{\underbrace{1! + 2! + \cdots}_{\nearrow 0} + n!}{(n+1)!}$$

$$\geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad v_n$$

$$u_n \geq v_n \geq 0$$

<u>avec</u> $v_n = \frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

diverge (Riemann $\alpha = 1 \leq 1$)

d'après le Th des équivalences des série numériques à termes positifs la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

d'après le Théorème de minoration des série à termes positifs la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

• $p = 2$

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$$

$$= \underbrace{\frac{1! + \cdots + (n-1)!}{(n+2)!}}_{v_n} + \underbrace{\frac{n!}{(n+2)!}}_{\frac{1}{(n+2)(n+1)} = w_n}$$

$\frac{1}{(n+2)(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

• Majorer v_n.

$$1! + \dots + (n-1)! = \sum_{k=1}^{n-1} k!$$

$$\forall\ 1 \leqslant k \leqslant (n-1), \quad k! \leqslant (n-1)!$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k! \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)! = (n-1)(n-1)!$$

$$\Rightarrow v_n \leqslant \frac{(n-1)(n-1)!}{(n+2)!} = \boxed{\frac{(n-1)}{(n+2)(n+1)(n)}} = t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

• $u_n = v_n + w_n$

• $0 < w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$

• $v_n \leqslant t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

(1) $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge car la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ (équivalence + série de Riemann)

(2) $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge car $\sum_{n\geq 1} t_n$ converge

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

(Th. de Majoration, Th des équivalences + Série de Riemann)

on a : $\begin{cases} u_n = v_n + w_n \\ \sum_{n\geq 1} v_n \text{ et } \sum_{n\geq 1} w \text{ convergent} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ converge

CV + CV = CV

CV + dV = dV

dV + dV on ne peut conclure

Exercice 9.

1/ $u_n = \dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

$0 \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge $(\alpha = 2 > 1)$

d'après le Th de majoration $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est une

série convergente, càd $\sum_{n\geq 1} u_n$ cva d'ou $\sum_{n\geq 1} u_n$

converge.

2/ $u_n = \dfrac{(-2)^n}{1+3^n}$ $0 \leq |u_n| = \dfrac{2^n}{1+3^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{3^n}$

$= v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique

convergente car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$. D'après le Th des

équivalences La série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ converge on a alors la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0} u_n$

d'où la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

3) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + \ln(n)}$

$$0 \leq |u_n| = \frac{1}{n^2 + \ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$)

donc, à l'aide de Th des équivalences $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ cv

d'où la cva et par la cv de $\sum_{n\geq 1} u_n$

4) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{1 + \cos(n) + e^n}$

$$|u_n| = \left| \frac{\overbrace{\sin(n)}^{\leq 1}}{\underbrace{1 + \cos(n) + e^n}_{\geq e^n}} \right| \leq \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique convergente de raison $q = \frac{1}{e}$, $(|q| < 1)$

le Th de majoration implique la cv de $\sum_{n\geq 0} |u_n|$

on a alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ cva et par suite

$\sum_{n\geq 0} u_n$ cv.

$v_n = |u_n|$

5/ $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)} = (-1)^n . v_n$ La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée car $(-1)^n . u_n = \frac{(-1)^n (-1)^n}{n - \ln(n)}$

$= \frac{1}{n - \ln(n)} \geq 0$

$\forall n \geq 2$

• $(|u_n|)_{n\geq 2}$ est une suite à valeurs positives

•• $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n - \ln(n)} = 0$ croissance comparée

••• $(|u_n|)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante :

si $f \nearrow \Rightarrow (u_n) \nearrow$

si $f \searrow \Rightarrow (u_n) \searrow$

$\cancel{f(u_n) = u_{n+1}}$ / $f(n) = u_n$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} 1$$

$$u_{n+1} - u_n \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

Soit $f : [2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x - \ln(x)}$$

$$f'(x) = - \frac{(x - \ln(x))'}{(x - \ln(x))^2} = - \frac{1 - \frac{1}{x}}{(x - \ln(x))^2} \leq 0$$

$1 - \frac{1}{x} > 0$

f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$,
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = f(n)$
$\Rightarrow (u_n)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante

on a : $\sum_{n \geq 2} u_n$ est une série alternée, tq :

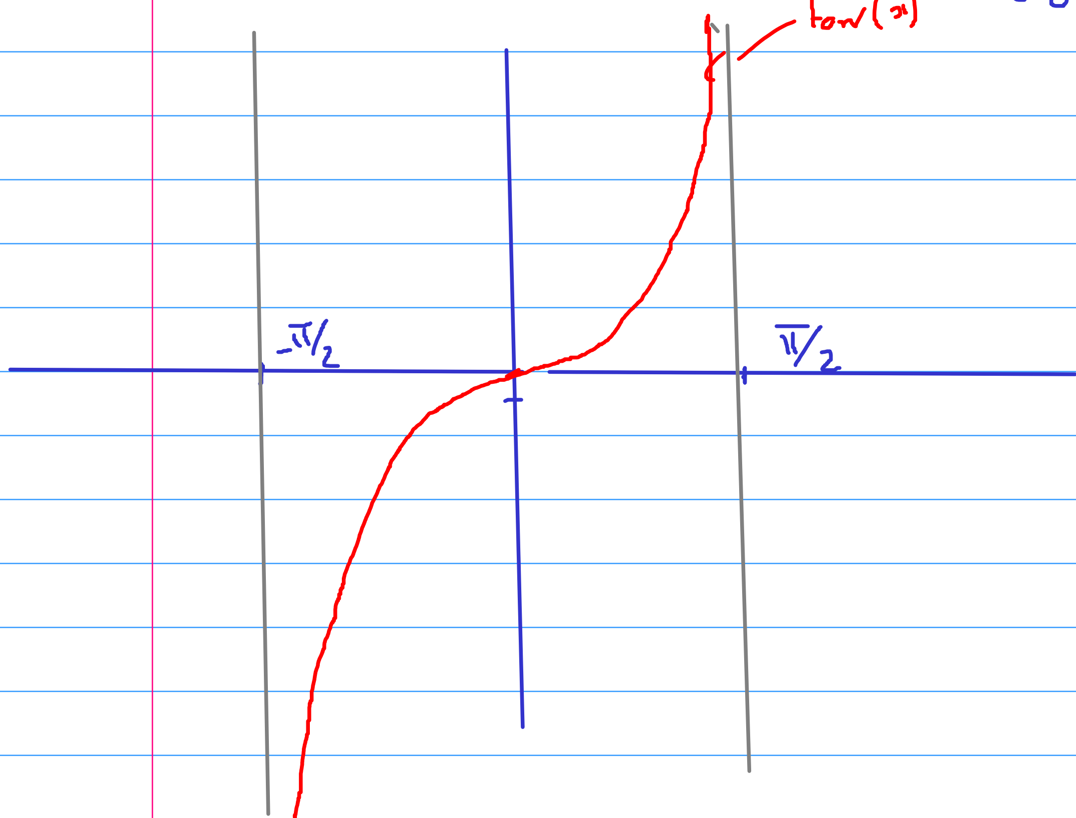
$(|u_n|)_{n \geq 2}$ est une suite positive

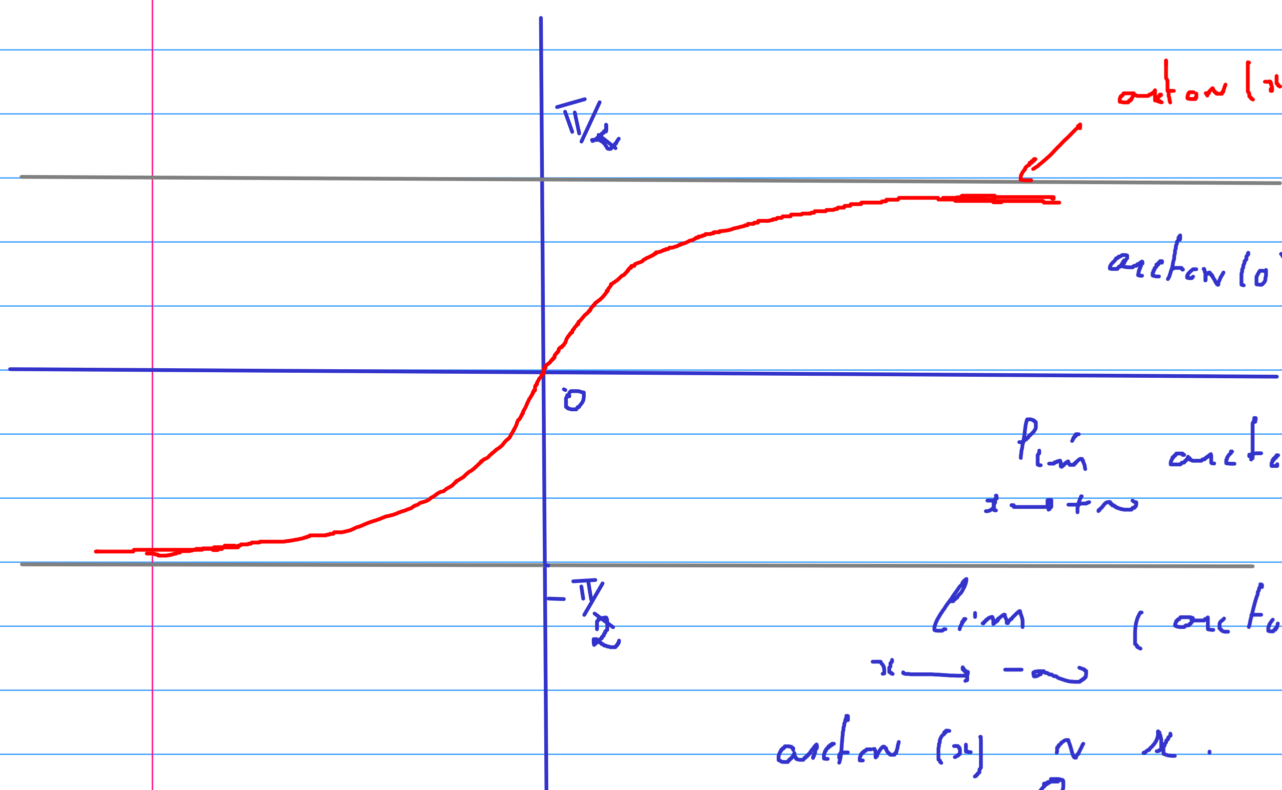
décroissante et tend vers 0.

d'où la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ CV

b/ $u_n = \arctan(n\alpha)\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

1ier cas : si $\alpha = 0$ $\quad U_0 =$





$\arctan(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\arctan(x)) = -\frac{\pi}{2}$

$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x.$

• 1^{er} cas $\alpha = 0$ $\arctan(0) = 0$

$\forall n \geq 0$ $u_n = 0$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge

•• $2^{\text{ème}}$ cas $\alpha \neq 0$

donc $\begin{cases} \arctan(\alpha n) \geq 0 & \forall n \geq 0 \quad \alpha > 0 \\ \arctan(\alpha n) \leq 0 & \forall n \geq 0, \quad \alpha < 0 \end{cases}$

$|u_n| = |\arctan(\alpha n) \sin(\frac{1}{n^3})| \geq 0$

$\in [0, \pi/4]$

$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \pi/2 \, \frac{1}{n^3}$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, $(\alpha = 3 > 1)$, de m̂ la série $\sum_{n \geq 1} \pi/2 \, \frac{1}{n^3}$ converge, d'après le Th des equivalences de série à termes positives la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument, donc elle converge.

7| $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$

méthode 1

sous 1) $u_{2k} = \dfrac{1+(-1)^{2k}}{(2k)^2} = \dfrac{2}{2^2 k^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{k^2}$ $(2k)^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_{2k+1} = \dfrac{1+(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \dfrac{1-1}{(2k+1)^2} = 0$ $\quad u_n \leq \dfrac{2}{n^2}$

méthode 2

on a :

$$0 \leq |u_n| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}$ converge car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$) d'après le Th de majoration des séries à termes positives $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ CV, d'où $\sum_{n\geq 1} u_n$ CVa

par suite $\sum_{n\geq 1} u_n$ CV.

8/ $u_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - 1\right) = \dfrac{(-1)^n\, n^2}{\sqrt{n^2+1}+1}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$. $\quad |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n} = n$

La série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement

Exercice 10 $\quad \alpha > 0 \quad \alpha \neq 1$

1/ $f_\alpha : [2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$

$$f_\alpha'(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}} = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}} \leq 0$$

f_α est une fct décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

$\forall n \geq 2, \quad \forall x \in [n-1, n]$

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$$

cste $\qquad\qquad\qquad\qquad$ cste

$$\Rightarrow \int_{n-1}^{n} f(n)\, dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\, dx} \leq \frac{1}{(n-1)^\alpha}}$$

(1)

Pour trouver un encadrement de S_N, on encadre $\frac{1}{n^\alpha}$ puis on applique la somme de $n=1$ à N

$\forall n \geq 1$

$\forall x \in [n, n+1]$

$$f(n+1) \leq \boxed{f(x) \leq f(n)}$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{n^\alpha}} \quad 2$$

1 et 2

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{et} \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx}$$

on applique la somme partielle de $n = 2$ à N

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_2^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1^\alpha} \leqslant \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$\alpha \neq 1$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_2^{N+1} \leqslant S_N - 1 \leqslant \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) \leqslant S_N - 1 \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{1}{(1-\alpha)}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha-1}} + 1}}_{= t_N} \leqslant S_N \leqslant \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} + 1}}_{= w_N}$$

2| $\alpha < 1 \Rightarrow 1-\alpha > 0$

• $t_N = \frac{1}{(1-\alpha)}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha-1}} + 1$

Montrons que $t_N \underset{+\infty}{\sim} \vartheta_N = \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{N^{\alpha-1}}$

$$\frac{t_N}{\vartheta_N} = \frac{N^{\alpha-1}}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{N^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} + N^{\alpha-1}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{t_N}{\vartheta_N} = \lim_{N\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{N^{\alpha-1}}{N^{\alpha-1}}}_{\to 1} - \underbrace{\left(\frac{N}{2}\right)^{\overset{<0}{\alpha-1}}}_{\to 0} + \underbrace{N^{\overset{<0}{\alpha-1}}}_{\to 0}\right)$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

• $$w_N = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1}.$$

montrons que $w_N \underset{+\infty}{\sim} \vartheta_N = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{N^{\alpha-1}}$

$$\frac{w_N}{\vartheta_N} = 1 - N^{\alpha-1} + (1-\alpha)N^{\alpha-1}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{w_N}{\vartheta_N} = 1 - 0 + 0 = 1$$

on a : $t_N \leqslant S_N \leqslant w_N$

$$\Rightarrow \frac{t_N}{\vartheta_N} \leqslant \frac{S_N}{\vartheta_N} \leqslant \frac{w_N}{\vartheta_N}$$

on passe à la limite en $+\infty$

on obtient $1 \leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{S_N}{\vartheta_N} \leqslant 1$

d'où $\lim_{N\to+\infty} \frac{S_N}{\vartheta_N} = 1 \Rightarrow S_N \underset{+\infty}{\sim} \vartheta_N$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{N^{\alpha-1}}$$

Rq $S_N \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\, \frac{1}{N^{\alpha-1}}}_{N \to +\infty \,\,\, +\infty}$ $\alpha < 1$

donc $(S_N)_{N\geq 1}$ diverge par suite la série

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

3/ $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0$

$$\underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}}_{\substack{\downarrow \\ N\to+\infty \\ 0}} \underbrace{- \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha-1}} + 1} \leq S_N \leq \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{N^{\alpha-1}}}_{\substack{N\to+\infty \\ 0}} - \frac{1}{1-\alpha} + 1$$

on passe à limite lorsque N tend vers $+\infty$

$$0 - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{2^{\alpha-1}} + 1 \leq \underbrace{\lim_{N\to+\infty} S_N}_{\|} \leq 0 - \frac{1}{1-\alpha} + 1$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{2^{\alpha-1}} + 1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

par exemple pour • $\alpha = 2$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

• $\alpha = 3$

$$\frac{9}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{2} + 1 = 3/2$$

3)b Trouvons un équivalent à $R_N = S - S_N$

$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, on note $R_{N,m} = \sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{n^\alpha}$

on sait que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx .$$

$$\sum_{n=N+1}^{m} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \sum_{n=N+1}^{m} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\Rightarrow \int_{N+1}^{m+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq R_{N,m} \leq \int_{N}^{m} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{N+1}^{m+1} \leq R_{N,m} \leq \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{N}^{m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \leq R_{N,m} \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{m^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

or $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}} = 0$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$$

Lorsque m tend vers $+\infty$ on obtient

$$\frac{-1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \leq R_N \leq \frac{-1}{1-\alpha}\,\frac{1}{N^{\alpha-1}}$$

on note $x_N = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{N^{\alpha-1}}$, on divise par x_N

on a :

$$\frac{N^{\alpha-1}}{(N+1)^{\alpha-1}} \leqslant \frac{R_N}{x_N} \leqslant 1$$

$$\frac{N^{\alpha-1}}{(N+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1 \qquad 1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

Donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{R_N}{x_N} = 1$

par unicité $R_N \underset{+\infty}{\sim} x_N = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}$

$\alpha > 1$

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}$$

Exercice 11

1) $f : [2 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$f'(x) = - \frac{(x\ln(x))'}{(x\ln(x))^2} = - \frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2} < 0$$

f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$

$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x \in [n, n+1]$

$$f(x) \leqslant f(n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(2)}$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{N+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx < S_N$$

$$t = \ln(x) \qquad x = 2 \longrightarrow t = \ln(2)$$

$$dt = \frac{dx}{x} \qquad x = N+1 \longrightarrow t = \ln(N+1)$$

$$\int_{2}^{N+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(N+1)} \frac{dt}{t}$$

$$= \left[\ln t\right]_{\ln(2)}^{\ln(N+1)} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2))$$

$$S_N \geq \underbrace{\ln(\ln(N+1))}_{N \to +\infty\ \ +\infty} - \ln(\ln(2))$$

on a : $\lim_{N \to +\infty} S_N = +\infty$

donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge

2/ $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$

$$= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\ln(n(1+1/n))}{\ln(n)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(n)} \cdot \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{= \frac{1}{n} + o(1/n)}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)$$

$$\frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$X = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)}$$

3/ d'après la question 2.

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)}$$

trouver un equivalent à $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Proposition si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge

alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$

$$u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$$

$$v_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

on a : $\overbrace{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n}^{Q2}$ et $\overbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge}}^{Q1}$

alors $\underbrace{\sum_{k=2}^{n} \left(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))\right)}_{\shortparallel} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Exercice 12

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$

Remarque : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne garde pas un signe constant

on pose $X = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $X \to 0 \iff n \to +\infty$

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{\left((-1)^{n+1}\right)^3}{3\, n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^{3n+3}}{n^{3/2}}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}}_{\shortparallel \atop a_n} \underbrace{- \frac{1}{2}\frac{1}{n}}_{\shortparallel \atop b_n} + \underbrace{\frac{1}{3}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}}_{\shortparallel \atop c_n} + \underbrace{o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right)}_{\shortparallel \atop d_n}$$

Etudions la convergence des séries de termes généraux a_n, b_n, c_n et d_n

1/ $a_n = -\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée. De plus $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante et tend vers 0. Donc d'après le critère des séries alternées la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. D'où la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n$.

2/ $b_n = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n}$, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann $\alpha = 1$).
Alors la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ diverge

3/ et 4/ $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ or $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ cv (Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ cva $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ cv

$d_n = o\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right)$

$c_n = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ $\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} d_n$ converge

$\sum_{n\geq 1} c_n$ converge

conclusion $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n + c_n + d_n$$

avec $\sum_{n\geq 1} a_n$ CV $\sum_{n\geq 1} b_n$ dV $\sum_{n\geq 1} c_n$ CV et $\sum_{n\geq 1} d_n$ CV

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = a_n$$

on a : $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 1} u_n$ dV, !

- On ne peut pas appliquer le Th des equivalences car $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ ne gardent pas un signe constant

2/ Etudions la convergence de la serie $\sum_{n\geq 1} u_n$

avec $u_n = \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1$

on prend $X = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ $n \to +\infty \iff X \to 0$

DL à l'ordre 3.

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$$

$$u_n = \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{6\,n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right)$$

d'après 1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ CV

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ dV

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ CV

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right)$ CV

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dV

b) $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - 1$ $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

$\Downarrow$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dV

c) $$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^3 + o\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6}\,\frac{(-1)^{n}}{n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right).$$

d'après la Q1

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \quad CV \\
&\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n}}{n^{3/2}} \quad CV \\
&\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right) \quad CV
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge}$$

d) $$u_n = \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2n+1}{2n}$$

$$= \cancel{1} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{6}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right) - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}}$$

d'après Q1 :

La série : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ CV

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}$ CV

$\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right)$ CV

$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} u_n$ CV

$$e)\quad u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{1+n} = \frac{\sqrt{n}}{n}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+(-1)^{n+1}\right)}{1+1/n}$$

$\frac{\sqrt{n}}{n}$ " $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$

$x = 1/n$

$$= \frac{\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}{1+1/n} = \left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\left(1-1/n+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on a : $\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}}_{\text{harmonique } \alpha=1\leq 1}$ DV , $\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}}_{\text{Riemann } \alpha=2>1}$ CV , $\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}_{\text{alternée}}$ CV

alternée, + critère des séries alternées

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}} \text{ CV} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} o\left(1/n^2\right) \text{ CV}$$

CVA + Riemann $\alpha = 3/2$
ou
série alternée + critères des séries alternées

car $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ CV (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

Conclusion : $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 13.

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \qquad u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n).$$
$$= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

1/ Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{e^{n+1}}{e^n} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \cancel{(n+1)}\, e \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2}$$

$$= e \cdot \left(1 + 1/n\right)^{-n} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$= e \; e^{-n\ln(1+1/n)} \; e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= e^{1 - n\ln(1+1/n) + 1/2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$u_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 - n\ln(1+1/n) + 1/2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+1/n)$$

$$= 1 - (n+1/2)\ln(1+1/n)$$

$$= 1 - (n+1/2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^2}$$ ← garde un signe constant

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (la série de Riemann $\alpha = 2 > 1$)

donc $\sum_{n\geq 1} -\frac{1}{4}\frac{1}{n^2}$ converge, d'après le Th des équivalences la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2/ En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $L \in \mathbb{R}_+^*$.

On a : $\begin{cases} \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge.} \\ u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n). \end{cases}$

On note $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \ln(a_{N+1}) - \ln(a_1)$

or $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge car la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

On note $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$

or $S = \lim_{N\to+\infty} \ln(a_{N+1}) - \ln(a_1)$

$= \lim_{N\to+\infty} \ln(a_{N+1}) - \ln(e)$

$= \lim_{N\to+\infty} \ln(a_{N+1}) - 1$

$\Rightarrow$

$a_1 = e$, $\ln(a_1) = 1$

donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \ln(a_{N+1}) = S + 1$

la fct $x \mapsto \exp(x)$ est une fct continue sur $\mathbb{R}$

Donc $\lim\limits_{N \to +\infty} e^{\ln(a_{N+1})} = e^{S+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{N \to +\infty} a_{N+1} = e^{S+1} > 0$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L = e^{S+1} \in \mathbb{R}_+^*$

3/ $(a_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ $\|$ $(a_n \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers L^2

$(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ donc $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers L.

la suite : $\left(\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente vers $\dfrac{L^2}{L} = L$

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2\, \cancel{e^{2n}}}{(n^n)^2 (\sqrt{n})^2} \cdot \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!\, \cancel{e^{2n}}}$$

$$= \frac{(n!)^2}{\cancel{n^{2n}}\ n} \cdot \frac{2^{2n} \cdot \cancel{n^{2n}}\ \sqrt{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{(n!)^2\, 4^n \sqrt{2n}}{n\,(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} \cdot \sqrt{2}$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!\, \sqrt{2n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2^n n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \sqrt{\pi}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n^2}{a_{2n}} = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2\pi}$

4) $a_n = \dfrac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow n! \underset{+\infty}{\sim} n^n \sqrt{n}\, e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$