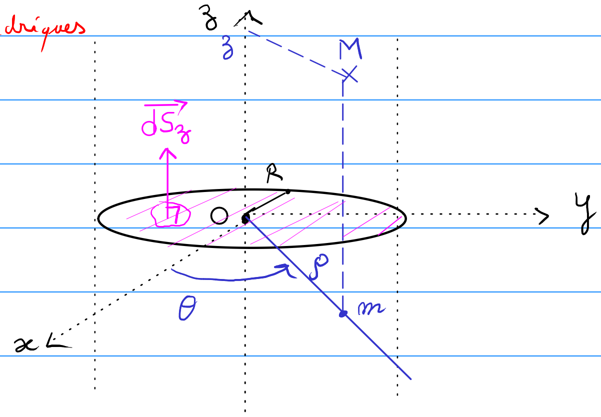
1/

Exercice 1 – Calculs d'aire et de volume

En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface d'un disque de rayon R.

coord. cylindriques



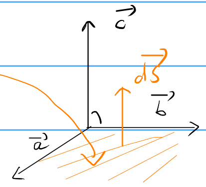
$$S = \iint dS_z = ?$$

or $\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}$

$$\Rightarrow \quad d\vec{OM} = \begin{vmatrix} d\rho \\ \rho\, d\theta \\ dz \end{vmatrix}$$

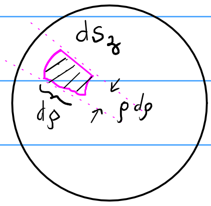
$$\vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ dS_\rho = \rho\, d\theta\, dz \\ \bullet\ dS_\theta = d\rho\, dz \\ \bullet\ dS_z = \rho\, d\rho\, d\theta \end{vmatrix}$$

$\vec{dS} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$



$$\underline{S} = \iint_{\text{disque}} dS_z = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\theta = \underbrace{\int_{\rho=0}^{R} \rho\, d\rho}_{\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R = \frac{R^2}{2}} \; \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \times d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} = \underline{\pi R^2}$$

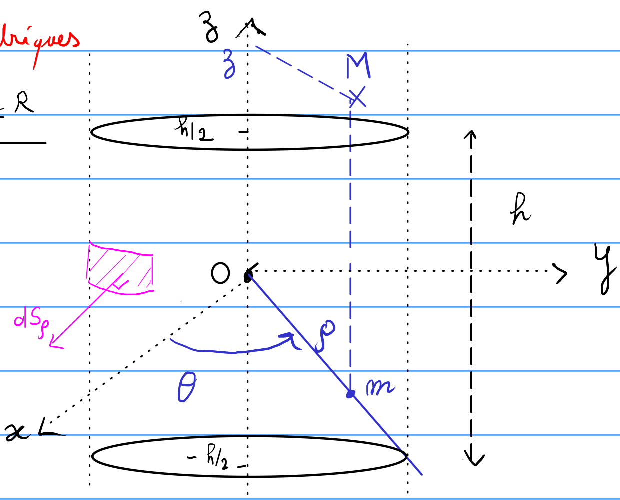
$\vec{e_z}$ $\odot$



2/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface de la paroi latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon R. $\rho = R = cst$

coord. cylindriques

$$S = \iint dS_\rho = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-h/2}^{h/2} \rho\, d\theta\, dz \quad , \quad \underline{\rho = R}$$



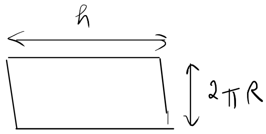
$$\vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ dS_\rho = \rho\, d\theta\, dz \\ \bullet\ dS_\theta = d\rho\, dz \\ \bullet\ dS = \rho\, d\rho\, d\theta \end{vmatrix}$$

donc

$$S = R \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta = R\,[z]_{-h/2}^{h/2}\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow S = R\,\underbrace{\left(\frac{h}{2} - \left(-\frac{h}{2}\right)\right)}_{h}\,(2\pi - 0)$$

$$\underline{S = (2\pi R)\, h}$$



3/ Calculer, en utilisant une intégrale triple, le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.

$$V = \iiint dV = \iiint d\rho \times \rho\, d\theta \times dz = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$V = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, h$$

$$\Longrightarrow \underline{V = \pi R^2 h}$$

Exercice 2 – Calculs de charge totale

En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer la charge totale contenue dans un disque de rayon R uniformément chargé en surface dont la densité surfacique vaut σ_0.

σ uniforme

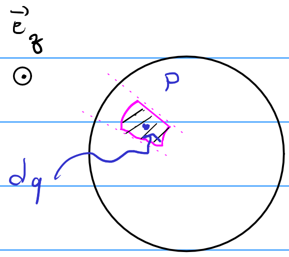
Q ?

densité surfacique de charge : $\boxed{\sigma = \dfrac{dq}{dS}}$

C

$C.m^{-2}$

m^2



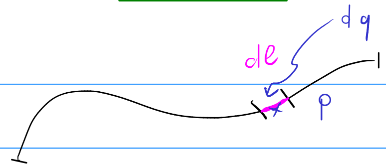
$\sigma = \sigma_0$ constante

$$Q = \iint_{\text{disque}} dq = \iint_{\text{disque}} \sigma\, dS = \sigma_0 \iint_{\text{disque}} dS = \sigma_0 \pi R^2$$

2/ Calculer la charge totale contenue dans un fil de longueur L uniformément chargé dont la densité linéique vaut λ_0.

densité linéique de charge : $\boxed{\lambda = \dfrac{dq}{d\ell}}$

$C.m^{-1}$



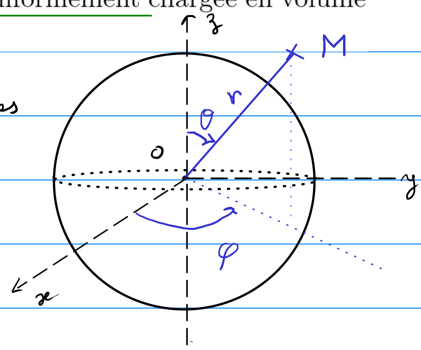
$\lambda = \lambda_0$ constant

$$Q = \int_{\text{fil}} dq = \int_{\text{fil}} \lambda\, d\ell = \lambda_0 \int_{\text{fil}} d\ell = \lambda_0 L$$

$\rho = \rho_0$ constant

3/ Calculer la charge totale contenue dans une sphère de rayon R uniformément chargée en volume dont la densité volumique vaut ρ_0.

$\vec{OM} = r\,\vec{e}_r$, $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ coord. sphériques



$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr = d\ell_r \\ r\,d\theta = d\ell_\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi = d\ell_\varphi \end{vmatrix} \qquad \vec{dS} = \begin{vmatrix} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ r\,dr\, \sin\theta\, d\varphi \\ r\, dr\, d\theta \end{vmatrix}$$

$$V = \iiint_{\text{sphère}} dV = \int_{r=0}^{R} r^2\, dr \int_{\theta=}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \underbrace{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R}_{\left(\frac{R^3}{3} - 0\right)} \times \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{-(\cos\pi - \cos 0)} \times 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$-(\underbrace{\cos\pi - \cos 0}_{}) \qquad -(-1-1) = 2$$

unif. chargée

$\rho = \rho_0 = \text{constante}$

$C.m^{-3}$ $\quad$ m^3 $\quad$ $\rho = \dfrac{dq}{dV}$

$$Q = \iiint_{\text{sphère}} dq = \iiint_{\text{sphère}} \rho \, dV = \rho_0 \, V_{\text{sphère}} = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$$

Exercice 5 – Charge totale d'une distribution surfacique *non uniforme $\sigma(\theta)$*

On considère une sphère de centre O et de rayon R portant en sa surface une densité de charges

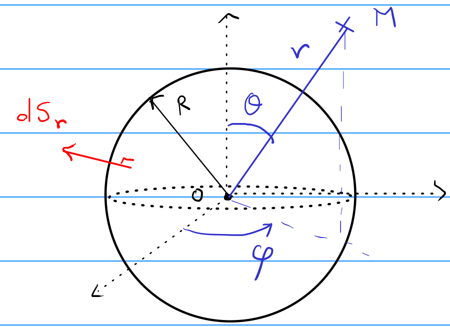
$$\sigma = \sigma_0(1 + \cos\theta)$$

où $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$

Calculer la charge totale portée par la distribution.

- $\sigma \mathrel{\hat{=}} \dfrac{dq}{dS} = \sigma_0 (1 + \cos\theta)$

- charge totale Q : $\quad Q \mathrel{\hat{=}} \displaystyle\iint_{P \in S} dq = \iint_{P \in S} \sigma \, dS_r$



coordonnées sphériques :

$$d\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} dr = dl_r \\ r\,d\theta = dl_\theta \\ r \sin\theta \, d\varphi = dl_\varphi \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{dS} = \left| \begin{array}{ll} \bullet\ r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi & = dS_r \\ \bullet\ r\,dr \sin\theta \, d\varphi & = dS_\theta \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta & = dS_\varphi \end{array} \right.$$

sur la sphère $r = R$, $\quad Q = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 (1 + \cos\theta) \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

cst

$$Q = \sigma_0 R^2 \underbrace{\left[\int_{\theta=0}^{\pi} (1+\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \right]}_{I_\theta = 2} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \right]}_{2\pi} = 4\pi R^2 \sigma_0$$

$$I_\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} (1 + \cos\theta) \underbrace{\sin\theta \, d\theta}_{-d(\cos\theta)} = -\int_{u=1}^{-1} (1+u)\,du = \int_{-1}^{1} (1+u)\,du$$

chgt de variable : $u = \cos\theta$

$$I_\theta = \left[\left(u + \frac{u^2}{2} \right) \right]_{-1}^{1} = \left(\left(1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) - \left(-1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) \right) = 2$$

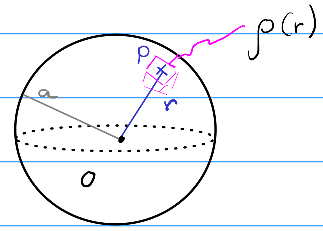
Exercice 6 – Noyaux atomiques *

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

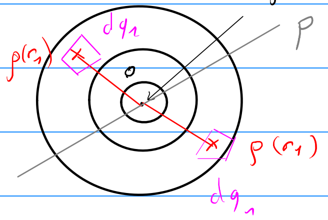
1/ Donner les symétries et invariances de cette distribution de charges.



- invariances : rotation de la distribution de charges selon θ et φ $\Rightarrow$ m̂ charge : invariant

$\hookrightarrow \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})$

- symétries :



$\rho(r) \hookrightarrow$ avec r

$\rho(r) = \rho(-r)$

tout plan P passant par le centre O est un plan de symétrie pour les charges

$\hookrightarrow \underline{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$

2/ Exprimer la charge totale Q du noyau.

$$Q = \iiint_{V\,(r<a)} dq = \iiint_{(r<a)} \rho(r)\, \overset{d\ell_r \times d\ell_\theta \times d\ell_\varphi}{dV}$$

$$Q = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$Q = \rho_0 \underbrace{\left(\int_{r=0}^{a}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr\right)}_{I_r} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$I_r = \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr = \left[\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)\right]_0^a = \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) = a^3 \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)}_{\frac{2}{15}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}}$$

Exercice 4 – Masse volumique de la Terre

On peut supposer, dans un modèle grossier, que la répartition de la masse de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R) n'est pas uniforme : le noyau terrestre, principalement formé de fer et de nickel, est plus dense que la croûte. La masse volumique ρ dépend donc de la distance r au centre C :

$$\hookrightarrow \rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) = \frac{dm}{dV}$$

Données : la densité du fer vaut environ 8 et celle des roches granitiques vaut environ 4.

1/ Exprimer la masse M de la Terre en fonction de R et ρ_0.

$$M = \iiint_{V\ \text{Terre}} dm = \iiint_{\text{sphère}} \rho(r)\, dV$$

<u>masse totale M de la Terre :</u>

$$M = \underbrace{\int_{r=0}^{R} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) r^2 dr}_{I_r} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$I_r = \rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{2R}\right) r^2 dr = \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{2R}\right) dr = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4 \times 2R}\right]_0^R$$

$$I_r = \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{8}\right) = \rho_0 R^3 \frac{5}{24}$$

$$\hookrightarrow \underline{M} = \rho_0 R^3 \frac{\overset{5}{\cancel{20}}\, \pi}{\underset{6}{\cancel{24}}} = \underline{\frac{5\pi}{6} \rho_0 R^3}$$

2/ Calculer numériquement la masse volumique au centre et à la surface de la Terre. Commenter.
On donne $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg et $R = 6.4 \times 10^3$ km $\searrow r = 0$ $\quad \downarrow r = R$

$R = 6.4 \times 10^6\ m$

$$M = \frac{5\pi}{6} \rho_0 R^3 \Longrightarrow \rho_0 = \frac{6M}{5\pi R^3} = 8742\ kg \cdot m^{-3}$$

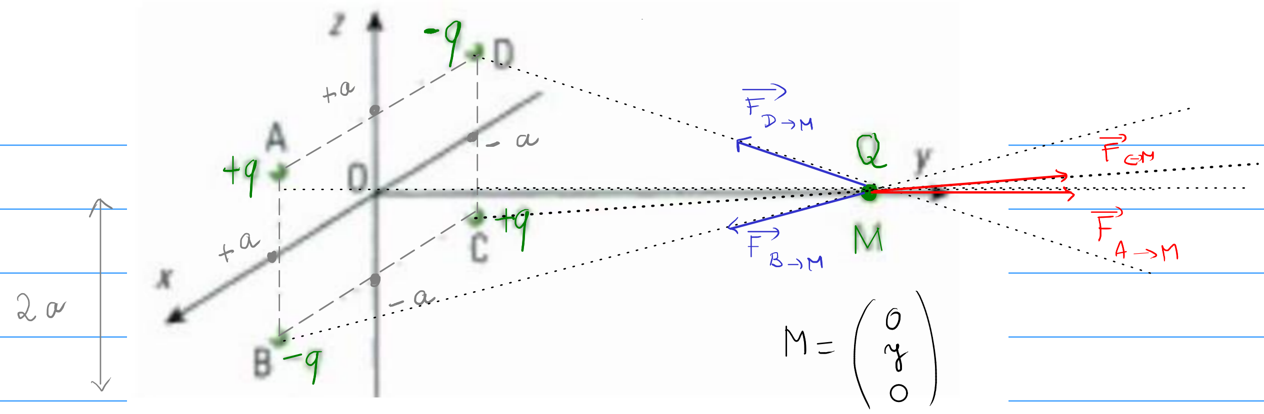
$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) \longrightarrow \rho(0) = \rho_0\ , \quad \rho(R) = \rho_0 \left(1 - \frac{R}{2R}\right)$$

<u>A.N :</u> • au centre : $\underline{\rho(r=0)} = \rho_0 = \underline{8742\ kg \cdot m^{-3}}$ (Fer : $d = 8$)

• à la surface : $\underline{\rho(r=R)} = \frac{\rho_0}{2} = \underline{4371\ kg \cdot m^{-3}}$ (granite : $d = 4$)

Exercice 3 – Distribution discrète de charges ponctuelles

Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue q, sont placées aux sommets d'un carré ABCD de côté $2a$, de centre O et appartenant au plan Oxz.
Déterminer l'expression de la force subie par la charge électrique Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy.



- <u>force totale $\vec{F}$:</u> $\vec{F}_Q = \vec{F}_{A\to M} + \vec{F}_{B\to M} + \vec{F}_{C\to M} + \vec{F}_{D\to M}$

$$\vec{F}_{A\to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A Q}{r_{AM}^2}\vec{u}_{A\to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A Q}{r_{AM}^3}\overrightarrow{AM}$$ (idem autres forces)

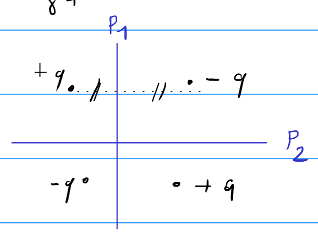
$q_A = q_C = +q$, $q_B = q_D = -q$ et $r_{AM} = r_{BM} = r_{CM} = r_{DM} = (2a^2+y^2)^{1/2} = r$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_Q = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^3}\left[q\begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} -a \\ y \\ +a \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} a \\ y \\ a \end{pmatrix} - q\begin{pmatrix} a \\ y \\ -a \end{pmatrix}\right] = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix}$$

<u>symétrie :</u>



- distribution de charge : P_1 et P_2 <u>plan d'antisym.</u> pour les charges $P_1 = (M, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et $P_2 = (M, \vec{e_y}, \vec{e_x})$

$P_1 = (M, Oz)$ $P_2 = (M, Ox)$ si $M \in Oy$

$\Rightarrow$ $\vec{E}(M) \perp P_1$ et P_2 $\Leftrightarrow$ $\vec{E}$ selon $\vec{e_x}$ et selon $\vec{e_z}$: $\underline{\underline{\vec{E} = \vec{0}}}$ seule solution