
SÉRIES - TD
COMPARAISON LOCALE DES FONCTIONS RÉELLES

Exercice 1.

Etudier la convergence des suites numériques suivantes, de terme général u_n :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
3. $u_n = \sqrt{n} e^{-\sqrt{\ln(n)}}$
4. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$
5. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice 2.

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites numériques suivantes, de terme général u_n :

1. $u_n = \left(\ln(1 + e^{-n^2})\right)^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = \left(\frac{e^n}{1 + e^{-n}}\right)^n$

Exercice 3.

Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{x^3 + x^{5/2}} - x^{3/2}$
2. $f_2(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}$
3. $f_3(x) = \frac{e^{1/x} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$
4. $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$
5. $f_5(x) = e^{1/x} - e^{1/(x+1)}$

Exercice 4.

Soit $f(x) = \left[\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right]^{x \ln(x)}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln(f(x))$ en $+\infty$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3(x) + x - 4(\cos x - 1)}{3x^2 + e^x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{e^x - \operatorname{ch} x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{1 - x + \ln(1+x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x - x^3} - \sqrt{x}}{1 - x^{3/4}}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x + 1} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} x(3+x) \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{x^2} \right) - \exp \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right)$

Exercice 6.

Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

1. $\cos(x) - 1$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0
2. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0
3. $x^{\ln(x)}$ et $(\ln x)^x$ au voisinage de $+\infty$
4. $x \ln(x)$ et $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7.

Soit $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. On suppose que $g \underset{+\infty}{=} o(f)$. Montrer que $\exp(g) \underset{+\infty}{=} o(\exp(f))$.
2. Montrer que la réciproque est fautive.
3. Application : comparer $f(x) = (\ln(\ln x))^{x \ln x}$ et $g(x) = (\ln x)^{x \ln(\ln(x))}$ au voisinage de $+\infty$.