Cycle pré-ingénieur - Première Année
Analyse 1 - 2023/2024

Rappels

Exercice 1. Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]0, \infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \leq 3$.

A faire chez soi

Exercice 2.

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$. Sans étudier les variations de f, trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient x, y, z trois réels tels que : $0 < a \leq x \leq b$, $d \leq y \leq c < 0$, $0 < e \leq z \leq f$. Déterminer un encadrement de :

1. $4x - 2y$
2. $\frac{x-y}{z}$

Exercice 4. Calculer le domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln |x|}{x}}$.

Exercice 5. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|x + 1| < 0.1$.
2. $|x - 2| > 10$.
3. $|x| < |x + 1|$.

4. $|2x-1| < |x-1|$.
5. $||x+3|-1| \leq 2$.
6. $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$.
7. $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$.
8. $\sqrt{x^2-2x+3} \leq x-1$.

Exercice 7. Calculer la valeur de :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2$.
2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 3$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^{2k}$.
6. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
7. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 - \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

   En déduire $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^k \binom{n}{k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 9. Ecrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^2$.

2. $\prod_{k=2}^{n}(2k+1)$.
3. $\prod_{k=3}^{n-1} k$.

Exercice 10. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=0}^{n} 3^k$.
2. $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$.
3. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}^\times$ et $n \in \mathbb{N}^\times$ tels que $p < n$. Montrer que

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 12. A partir des formules $(\sin(x+y) = \ldots), (\cos(x+y) = \ldots)$ et $(\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$, démontrer les formules suivantes :

1. $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
2. $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
3. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$.
4. $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, où $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 13. Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$.
2. $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x)$.
3. $\tan(2x) = 3\tan(x)$.