SUITES NUMÉRIQUES
DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Exercice 1 (Suites géométriques)
Soit la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 2.

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 \times 2^n$.
2. Généraliser pour une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0.

Solution
(Définition de la propriété)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit la propriété $P_n : u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$

(Vérification au premier rang)

- $\dfrac{1}{2}(5 - 3^0) = \dfrac{1}{2}(5 - 1) = 2 = u_0$ donc P_0 est vraie.

  (Hérédité)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie. C'est à dire $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.

  On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie, on a P_{n+1} vraie. On choisit donc un n quelconque, on suppose que P_n est vraie et on va essayer de montrer que P_{n+1} est vraie. Puisque n était quelconque, on a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie, P_{n+1} est vraie.
  On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1}$
  On a $u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$
  Donc P_{n+1} est vraie.
  On a montré $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
  Conclusion

- Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.

Exercice 2 (Démontrer une formule)
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 5$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$

Solution
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit la propriété $P_n : u_n = 3 \times 2^n$

- $\dfrac{1}{2}(5 - 3^0) = \dfrac{1}{2}(5 - 1) = 2 = u_0$ donc P_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie. C'est à dire $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.

  On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(5 - 3^{n+1})$
  On a $u_{n+1} = 3u_n - 5 = 3\left(\dfrac{1}{2}(5 - 3^n)\right) - 5 = \dfrac{15}{2} - \dfrac{3^{n+1}}{2} - 5 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3^{n+1}}{2}$
  Donc P_{n+1} est vraie.

- Donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}(5 - 3^n)$.

Exercice 3 (Démontrer une formule)
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution

- On définit P :$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• Initialisation
On a $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = 1^2$, Donc P_1 est vraie.
• Hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, supposons que P_k est vraie, c'est à dire que
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

On veut montrer que P_{k+1} est vraie c'est à dire
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
On a
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$
$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$
$= \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$
$= (k+1)\dfrac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$
$= (k+1)\dfrac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}$
$= (k+1)\dfrac{(2k^2 + 7k + 6)}{6}$ ... a-t-on P_{k+1} ?
Or $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$
On obtient bien la formule attendue.
Donc la propriété P_{k+1} est vérifiée.

• On a vérifié l'initialisation et l'hérédité donc on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4 (Initialisation)
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
Que peut-on dire de la suite ? Qu'y a-t-il à démontrer ?
Solution
En calculant les premiers termes on obtient : $u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 1, \ldots$
On peut émettre l'hypothèse que $\forall n \geqslant 1, u_n = 1$ mais il faut le démontrer par récurrence.

Exercice 5 (Initialisation)
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3n$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_{n+1} - u_n$.
   En supposant que u_n est un multiple de 3, démontrer que u_{n+1} est un multiple de 3.
2. Peut-on en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 3n$ est un multiple de 3 ?

Solution
Si u_n est un multiple de 3, alors $u_n = 3k$ alors $u_{n+1} = 1 + 3(n+1) = 1 + 3n + 3 = u_n + 3$ comme u_n et 3 sont des multiples de 3 alors u_{n+1} est un multiple de 3.
On ne peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est un multiple de 3 car la propriété est fausse pour $u_1 = 1$, ce qui constitue un contre-exemple : l'initialisation n'est pas vérifiée.

Exercice 6 (Définition d'une suite)

1. Peut-on définir la suite v, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$ avec $v_0 = -\dfrac{1}{4}$?
2. Peut-on définir la suite u par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$?

Solution

1. $v_0 = -\dfrac{1}{4} \quad v_1 = \dfrac{-\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{-3} \quad v_2 = \dfrac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = -\dfrac{1}{2} \; v_3 = \dfrac{-1/2}{1 - 1/2} = -1$
   On ne peut pas calculer v_4 donc la formule ne définit pas une suite.
2. Par récurrence, on démontre que la suite est définie :
   • On définit $P : \forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n$ existe et $u_n > 0$
   • On a u_0 existe et $u_0 > 0$ donc P_0 est vraie.

• Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $P_k : u_k = (k+1)^3 + 1$ vraie on va montrer que $P_{k+1} : u_k$ existe et $u_k > 0$ est vraie.

On a u_k existe et $u_k > 0$ donc $\dfrac{1}{1+u_k}$ est défini (c'est u_{k+1}) et $u_{k+1} > 0$ donc P_{k+1} est vraie.

• Donc puisque l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées,

on a

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini et la suite est définie.

Exercice 7 (Sens de variation et monotonie)

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par récurrence par : $u_1 = \sqrt{2}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 .
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

<u>**Solution**</u>

1. On a $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $u_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.
2. Pour montrer que (u_n) est croissante, il suffit de montrer que
   $\forall n \in \mathbb{N}, un < u_{n+1}$
   • On va donc démontrer par récurrence P telle que
   $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

   On définit $P : \forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = \sqrt{n+9}$
   • On a $0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$ car $2 \leq 2+\sqrt{2}$ et la fonction racine carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc P_1 est vraie.
   • Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $P_k : 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$ vraie on va montrer que $P_{k+1} : 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$ est vraie.
   On a $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq$ donc $2 \leq 2+u_k \leq 2+u_{k+1} \leq 2+\sqrt{2}$.
   On applique la fonction racine carré qui est strictement croissante sur $rplus$, $2 \leq \sqrt{2+u_k} \leq \sqrt{2+u_{k+1}} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$. donc $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$.
   Or $2 > 0$ et $\sqrt{2+\sqrt{2}} \leq \sqrt{2+2} \leq 2$. En utilisant à nouveau la croissance de la fonction racine carré.
   Donc P_{k+1} est vraie.
   • Donc puisque l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées, on a
   $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
   La suite est donc croissante.
3. La suite est coissante et majorée donc elle est convergente.
   Soit $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$, f est continue donc la limite de la suite l vérifie $l^2 = 2+l$ avec $l > 0$
   On résout $l^2 - l - 2 = 0$. -1 est solution (évidente). L'autre solution est 2 (le produit des solutions est $-2 = \dfrac{c}{a}$). 2 est bien solution de l'équation $f(l) = l$ et c'est la seule solution possible de (u_n) converge vers 2.

Exercice 8 (Démontrer un encadrement)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0.4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$.

1. Calculer u_1, u_2 et des valeurs approchées de u_3, u_4
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
3. La suite est-elle monotone ?

<u>**Solution**</u>

1. On a $u_1 = 0.96, u_2 = 0.1536, u_3 = 0.52002816, u_4 = 0.9983950491228058, u_5 \approx 0.00641$
   - On définit P par $\forall P(n) : n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
   - On a bien $P(0)$ vraie car $0 < u_0 < 1$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $0 < u_n < 1$ alors $4u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$ donc le produit est strictement positif donc $u_{n+1} > 0$ donc $P(n+1)$ est vraie.

- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

2. On observe que $u_3 < u_4$ et $u_4 > u_5$ donc la suite n'est pas monotone.

Exercice 9
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée.
4. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc la suite est strictement croissante.
2. Par récurrence :
   - On définit P : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$.
   - On a $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n > n^2$.
     On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 \geqslant (n + 1)^2 + 2 > (n + 1)^2$ Donc $P(n + 1)$ est vraie.
   - Donc, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > n^2$.
3. Les premiers termes de la suite sont 1, 4, 9, 16
   On conjecture $u_n = (n + 1)^2$
   On le démontre par une récurrence facile : calcul pour l'hérédité : La formule à obtenir est $u_{n+1} = (n + 2)^2 = n^2 + 4n + 4$
   $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4$. CQFD
4. La limite de (u_n) est $+\infty$ (produit de limite).

Pour aller plus loin ...

Exercice 10 (Démontrer une formule)
Dans chacun des cas suivants calculer les premiers termes de la suite u, conjecturer pour tout réel n une formule explicite de u_n et la démontrer par récurrence :

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 9n + 7$.
3. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 3n + 1$.

<u>**Solution**</u>

1. On a $u_0 = 3, u_1 = \sqrt{10}, u_2 = \sqrt{11}, u_3 = \sqrt{12}$.
   On "devine" que la formule est en n puisque on gagne 1 à chaque pas. On cherche donc $u_n = \sqrt{n + \ldots}$, puis on propose $u_n = \sqrt{n+9}$.
   On va donc démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+9}$

   • On définit $P : \forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = \sqrt{n+9}$
   • On a $\sqrt{0+9} = 3 = u_0$ donc P_0 est vraie.
   • Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $P_k : u_k = \sqrt{k+9}$ vraie on va montrer que $P_{k+1} : u_{k+1} = \sqrt{k+10}$ est vraie.
   On a $u_{k+1} = \sqrt{u_k^2 + 1} = \sqrt{n+9+1} = \sqrt{n+10}$
   Donc P_{k+1} est vraie.
   • Donc puisque l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+9}$
2. On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 9$, $u_3 = 28$. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 1$
   • On définit $P : \forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = n^3 + 1$
   • On a $0^3 + 1 = 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
   • Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $P_k : u_k = k^3 + 1$ vraie on va montrer que $P_{k+1} : u_{k+1} = (k+1)^3 + 1$ est vraie.
   On a $u_{k+1} = u_k + 3k^2 + 3k + 1 = k^3 + 1 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 + 1$
   Donc P_{k+1} est vraie.
   • Donc puisque l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées,
   on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 + 1$
3. On a $u_0 = 1$, $u_1 = 8$, $u_2 = 27$. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^3 + 1$
   • On définit $P : \forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = (n+1)^3 + 1$
   • On a $(0+1)^3 + 1 = u_0$ donc P_0 est vraie.
   • Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $P_k : u_k = (k+1)^3 + 1$ vraie on va montrer que $P_{k+1} : u_{k+1} = (k+2)^3 + 1$ est vraie.
   On a $u_{k+1} = u_k + 3k^2 + 9k + 7 = (k+1)^3 + 3k^2 + 9k + 7 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 9k + 7 = k^3 + 6k^2 + 12k + 8$
   Or $(k+2)^3 = k^3 + 6k^2 + 12k + 8$
   Donc P_{k+1} est vraie.
   • Donc puisque l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées,
   on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^3 + 1$

Exercice 11 (Démontrer une formule*)
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

<u>**Solution**</u>

•$\forall n \in \mathbb{N}$ soit la propriété $P_n : S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

• On a $\dfrac{2^2 \times 3^2}{4} = 9 = 1^3 + 2^3 = S_2$ donc P_2 est vraie.
• Soient $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
Supposons que P_n est vraie, c'est à dire $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4}$

Alors
$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 &= \frac{n^2\left(n^2 + 2n + 3\right) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{4} \\ &= \frac{n^4 + 3n^3 + 6n^2 + 3n + 1}{4} \\ &= \frac{\left(n^2 + 2n + 1\right)\left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} \end{aligned}$$

Donc $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc P_{n+1} est vraie.

• Donc $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 12 (Démontrer une formule)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par récurrence par :
$u_1 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Solution

• On définit P : $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

• On a $u_1 = 1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1$ donc $P(1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
On a $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{1}{3} u_n = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{1}{3} \times n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = (n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

• Donc, par le principe de récurrence, $u_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 13 (Nombre d'opérations pour calculer un terme)
La suite (x_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$.
La suite (y_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$.

1. Pour calculer x_{50} combien faut-il d'opérations ?
2. Démontrer par récurrence que $x_n = 2^{n+1} + 1$.
3. Pour calculer x_{50} avec la formule du 2), combien faut-il d'opérations ?
4. Démontrer par récurrence que $2x_n - y_n = 5$ et en déduire l'expression de y_n en fonction de n.

Solution

1. La réponse dépend de ce que l'on appelle opération. On supposera que $+, *, -, \%, x^n$ est une opération. Dans ce cas on a besoin de 2 opérations pour calculer x_{n+1} en fonction de x_n. Donc pour x_50, on a besoin de 100 opérations.
2. • On définit P : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : x_n = 2^{n+1} + 1$.
   • On a $2^{0+1} + 1 = 3 = x_0$ donc P_0 est vraie.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $x_n = 2^{n+1} + 1$ est vraie.
   On a $x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2 \times 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   • Donc, par le principe de récurrence, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
3. Avec la formule du 2, il faut 3 opérations.
4. • On définit P : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 2x_n - y_n = 5$.
   • On a $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$ donc P_0 est vraie.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $2x_n - y_n = 5$ est vraie.
   On calcule :
   $$\begin{aligned} & 2x_{k+1} - y_{n+1} \\ =& 2\left(2x_4 - 1\right) - \left(2y_2 + 3\right) \\ =& 4x_2 - 2y_1 - 2 - 3 \\ =& 2\left(2x_2 - y_2\right) - 5 \\ =& 2 \times 5 - 5 \\ =& 5 \end{aligned}$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   • Donc, par le principe de récurrence, $2x_n - y_n = 5$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 2^{n+2} - 3$

Exercice 14 (Sens de variations)
Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Cette suite est-elle monotone ?

Solution

1. Par récurrence :
   - On définit P par $\forall P(n) : n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
   - On a bien $P(0)$ vraie car $0 < u_0 < 1$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $0 < u_n < 1$ alors $0 > -\frac{2}{5}u_n > -\frac{2}{5}$ et $1 > -\frac{2}{5}u_n + 1 > 1 - \frac{2}{5}$ donc $0 < \frac{3}{5} < u_{n+1} < 1$ donc $P(n+1)$ est vraie.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
2. $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3}{5} = 0.6$ et $u_2 = \frac{19}{25} = 0.76$
   donc cette suite n'est pas monotone mais semble convergente.

Exercice 15 (Encadrement et monotonie)
Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par récurrence par :
$u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. Montrer que cette suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.
2. Montrer par récurrence que, pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 6$.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Etuder la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Solution

1. On a $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 5$ donc $u_1 - u_2 \neq u_1 - u_0$ donc la suite n'est pas arithmétique et $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite n'est pas géométrique.
2. Par récurrence :
   - On définit P par $\forall P(n) : n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 6$
   - On a bien $P(0)$ vraie car $0 < u_0 < 6$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $0 < u_n < 6$ alors $0 < \frac{1}{2}u_n < 3$ et $3 < \frac{1}{2}u_n + 3 > 6$ donc $0 < 3 < u_{n+1} < 6$ donc $P(n+1)$ est vraie.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 6$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{6 - u_n}{2}$ Comme $0 < u_n < 6, \frac{6 - u_n}{2} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
4. La suite étant monotone et bornée, elle converge vers une solution de $x = \frac{1}{2}x + 3$. Cette équation a une seule solution qui est donc la limite 6.

Exercice 16 (Suites de fonctions)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ démontrer que la fonction $f_n : x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$$

Solution
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit la propriété

$$P_n : f_n : x \mapsto x^n \text{ est dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$$

• Initialisation pour $n = 2$

On veut montrer

$$P_2 : f_2 \text{ est dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

P_2 est vérifiée car f_2 est la fonction carré.

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On veut montrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} c'est à dire,
si f_n est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$
alors f_{n+1} est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$

On suppose que f_n est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = xf_n(x)$ donc comme $f_1 : x \mapsto x$ et f_n sont dérivables, alors f_{n+1} est dérivable comme produit de fonctions dérivables.
De plus $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}'(x) = 1 \times f_n(x) + x \times f_n'(x) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$
Donc la propriété P_{n+1} est vérifiée.

• Donc $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = nx^{n-1}$

SUITES NUMÉRIQUES
ETUDES DE CONVERGENCE DES SUITES

Exercice 17 (calcul de limites)
Déterminer les limites des suites suivantes (définies pour pour tout entier n non nul) :

a) $u_n = (1-2n)\left(n^2+3\right)$ b) $u_n = \dfrac{3}{3+2n}$ c) $u_n = 4n - 1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}}$

d) $u_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^2$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-2n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$.
Donc par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $\overset{n}{\lim\limits_{n\to+\infty}} -1 + \dfrac{5}{\sqrt{n}} = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ par produit.

Exercice 18 (calcul de limites)

a) $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$ b) $u_n = -3n^2 + 6n$ c) $u_n = \dfrac{3n+5}{n^2-4}$

d) $u_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$ e) $u_n = \dfrac{n^3+4}{2n^2+5}$ f) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$

Solution

a) $u_n = -n^2 + \sqrt{n} = -n^2\left(1 - \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}\right) = -n^2\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$.
Par produit de limites $\lim\limits_{n-1+\infty} u_n = -\infty$

b) $u_n = -3n^2 + 6n = -3n^2\left(1 - \dfrac{6n}{3n^2}\right) = -3n^2\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 = -\infty$

c) $u_n = \dfrac{3n+5}{n^2-4} = \dfrac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{n\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{5}{n} = 3$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{n^2} = 1$ Par quotient et produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d) $u_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n} = \dfrac{n^2\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \dfrac{-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n}}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} = -2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{5}{n} = 3$
Donc par quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{2}{3}$

e) $u_n = \dfrac{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{n\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}{2+\frac{5}{n^2}}$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{4}{n^3} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{5}{n^2} = 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

f) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}}\left(-3 + \dfrac{5}{n}\right) = \sqrt{n}\left(-3 + \dfrac{5}{n}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 + \dfrac{5}{n} = -3$
Donc par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 19 (calcul de limites)
Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2}$$

Solution
Il s'agit d'une forme indéterminée, on mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur les termes qui tendent le plus vite vers l'infini

$$\frac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2} = \frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{n}} = -\frac{1}{1} = -1$$

Exercice 20 (calcul de limites)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1-\sqrt{n^2+1}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
Solution

$$u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1-\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Deuxième méthode (moins bonne)

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1-\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-\sqrt{n^2+n}}{1} \times \frac{1}{1-\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2-\left(n^2+n\right)}{n+\sqrt{n^2+n}} \times \frac{1+\sqrt{n^2+1}}{1^2-(n^2+1)} \\ &= \frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}} \times \frac{1+\sqrt{n^2+1}}{-n^2} = -\frac{1}{n} \times \frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+n}} = -\frac{1}{n} \times \frac{1+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{n+\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \\ &= -\frac{1}{n} \times \frac{1+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{n} \times \frac{n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = -\frac{1}{n} \times \frac{\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Exercice 21 (Suite monotone)
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,01 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que cette suite est croissante.
2. On suppose que la suite est majorée, en déduire alors qu'elle est convergente et déterminer sa limite éventuelle.
3. Conclure sur l'absurdité de l'hypothèse. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution

1. Raisonnement par récurrence :
   (a) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : 0 < u_n < u_{n+1}$
   (b) Initialisation : $u_1 = u_0^2 = 1.01u_0$ comme $u_0 = 1.01 > 0$, $0 < u_0 < u_1$ donc $P(0)$ est vraie.
   (c) Hérédité : soit un entier $p \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_p < u_{p+1}$
   On élève au carré par la fonction carré strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $0 < u_p^2 < u_{p+1}^2$ donc $0 < u_{p+1} < u_{p+2}$ donc $P(p)$ est vraie.
   (d) Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. D'après le théorème de la convergence monotone, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme elle est croissante, elle converge. Soit l sa limite. En passant à la limite, $l = l^2$ donc $l = 0$ ou $l = 1$.

3. Or $u_0 = 1.01$ et (u_n) est croissante donc $l \geqslant 1.01$. Aucune des deux limites nécessaires ne convient donc (u_n) n'est pas bornée.
   Comme (u_n) n'est pas bornée et qu'elle est croissante, elle est divergente et tend vers $+\infty$ (propriété).

Exercice 22 (suite monotone)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, quelle peut être la valeur de l ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

<u>Solution</u>

1. $u_1 = \frac{1}{6}u_0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
   On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini. Dans ce cas, comme $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} > 0$, u_{n+1} est positif.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ admet une limite l alors
   $$l = \frac{1}{6}l^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 9 = 0 \Leftrightarrow (l-3)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 3$$
3. Effectuons un raisonnement par récurrence, $u_0 = 0 < 3$,
   On ne rédige que les calculs de l'hérédité (en devoir rédaction complète exigée).
   Montrons que $u_n < 3$ entraine que $u_{n+1} < 3$
   On a $u_n < 3$ donc $u_n^3 < 9$ car la fonction carré est strictement croissante sur $rplus$.
   Donc $\frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6} \times 9 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 3$
4. Calculons $u_{n+1} - u_n$
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{1}{6}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = \frac{1}{6}\left(u_n - 3\right)^2 > 0$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, comme elle est bomée par 3, elle convergente vers la seule valeur qui vérifie $l = \frac{1}{6}l^2 + \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $l = 3$

Exercice 23 (calcul de limites)

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par la donnée de :

$$0 < u_0 < 1 \quad \text{ et } \quad u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2$$

<u>Solution</u>
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, celle-ci vérifie $l = l - l^2 \Leftrightarrow l = 0$
Regardons si la suite est monotone, pour tout $n \geqslant 1$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = -(u_{n-1})^2 \leqslant 0$ Donc la suite est décroissante.
Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 0 < u_n < 1$

- On définit P par $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 0 < u_n < 1$
- On a bien $P(0)$ vraie car $0 < u_0 < 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $0 < u_{n-1} < 1$ alors $u_n = u_{n-1} - (u_{n-1})^2 = u_{n-1}(1 - u_{n-1})$
  donc $0 < u_{n-1} < 1$ entraîne $u_n = u_{n-1}(1-u_{n-1}) > 0$ car produit de deux réels positifs donc $0 < 3 < u_{n+1} < 6$ donc P_n est vraie.
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 , comme elle est décroissante, elle converge vers la seule limite possible $l = 0$.

Exercice 24 (suite monotone)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in]1;2]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2$
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

Solution
(éléments)

1. Par un raisonnement par récurrence (à rédiger) : $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \geqslant 1$.
   Montrons que $u_n > 1$ entraine que $u_{n+1} > 1$ (on utilise le sens de variation de la fonction carré comme dans l'exercice 22)

   $$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$
2. Par un raisonnement par récurrence (à rédiger) : $u_0 \in]1,2]$ donc $u_0 \leqslant 2$.
   Montrons que $u_n \leqslant 2$ entraine que $u_{n+1} \leqslant 2$

   $$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} \leqslant \frac{(2)^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \leqslant 2$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2$
3. Calculons

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4} - u_n = \frac{1}{4}\left(u_n^2 - 4u_n + 3\right) = \frac{1}{4}\left(u_n - 1\right)\left(u_n - 3\right)$$

   Comme $1 < u_n \leqslant 2$, on a $u_n - 1 > 0$ et $u_n - 2 \leq -1 < 0$, par conséquent

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\left(u_n - 1\right)\left(u_n - 3\right) < 0$$

   Ce qui montre que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.

   Autre méthode, comme la suite est à valeur strictement positive, on peut regarder le quotient de u_{n+1} par u_n :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}}{u_n} = \frac{u_n}{4} + \frac{3}{4u_n}$$

   Il faut alors étudier la fonction $f :]1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4x}$

   on a $f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4x^2} = \dfrac{x^2 - 3}{4}$

x	1		$\sqrt{3}$		2
signe de f'		$-$	0	$+$	
variation de f	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	

   Cela montre que

   $$\forall u_n \in]\,1,2]\,, f\left(u_n\right) < 1$$

   Et que donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (à justifier comme exercice précédent)
   Ce qui montre aussi que la suite est strictement décroissante. De plus elle est minorée par 1 donc elle converge.
4. On note l cette limite, elle appartient à $[1,2]$ et cette valeur vérifie

   $$l = \frac{l^2}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{l^2}{4} - l + \frac{3}{4} \Leftrightarrow l^2 - 4l + 3 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} l = 1 \\ \text{ou} \\ l = 2 \end{array}\right.$$

   Par conséquent $l = 1$ car (u_n) est décroissante.

Exercice 25 (suite géométrique associée)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

<u>Solution</u>

1.
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1} - 2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1} + 2} = \frac{u_n + 8 - 2\left(2u_n + 1\right)}{u_n + 8 + 2\left(2u_n + 1\right)} = \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10} = -\frac{3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2} = -\frac{3}{5} v_n$$

   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{A}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$

2.
$$v_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n v_0 = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n\left(u_n + 2\right) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -2 - 2v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n\left(v_n - 1\right) = -2 - 2v_n \Leftrightarrow u_n = -\frac{2 + 2v_n}{v_n - 1} = -\frac{2 - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n - 1}$$

4.
$$\text{Comme } -1 < -\frac{3}{5} < 1$$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{2}{-1} = 2$

Exercice 26 (calcul de limites)
Calculer, si elle existe, la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'expression

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

<u>Solution</u>

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \frac{n^2 + n + 1 - \left(n^2 - n + 1\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}}$$
$$= \frac{2}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

Donc cette expression admet une limite et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Exercice 27 (*)
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général u_n définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n} = \sum_{1}^{k} \frac{2n+1}{3n^2+k}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Solution

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{3n^2+n} \leqslant \frac{1}{3n^2+k} \leqslant \frac{1}{3n^2+1}$$

Donc

$$\frac{2n+1}{3n^2+n} + \frac{2n+1}{3n^2+n} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n} \leqslant \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$
$$\leqslant \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+1} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+1}$$

Les n termes dans le premier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+n}$. Les n termes dans le dernier membre sont tous égaux à $\frac{2n+1}{3n^2+1}$, on en déduit que

$$n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{2n+1}{3n^2+1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+n} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n \times \frac{2n+1}{3n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

Exercice 28 (série télescopique)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$
A l'aide de la question 1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1. $$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2. **Première méthode**
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$
Dans la seconde somme on pose $k' = k+1$, alors $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$
Ensuite on change k' en k
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
Car tous les autres termes se simplifient

Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est 1 .

Deuxième méthode

$$u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

Car tous les autres termes se simplifient Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{M}}$ converge et sa limite est 1 .

Exercice 29 (*)
On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme $u_0 = \frac{11}{4}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente et déterminer sa limite.
<u>Solution</u>
Si la suite de terme général u_n converge vers une limite l alors

$$l = \frac{5}{2}+\sqrt{l-\frac{7}{4}}$$

Il est clair qu'il va falloir élever au carré que lque chose, mais si on élève au carré ces deux expressions on va avoir un double produit où il y aura encore une racine alors il faut modifier légèrement cette égalité

$$l-\frac{5}{2} = \sqrt{l-\frac{7}{4}}$$

On y va

$$\left(l-\frac{5}{2}\right)^2 = l-\frac{7}{4}$$

Mais attention, il faudra faire une réciproque car on n'a pas travaillé par équivalence ($l-\frac{5}{2}$ négatif es possible).

$$l^2-5l+\frac{25}{4} = l-\frac{7}{4} \Leftrightarrow l^2-6l+8=0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = 36-4\times 8 = 4$$

Et donc comme racines

$$l_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \quad \text{et} \quad l_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

La solution $l=2$ ne convient pas car

$$2-\frac{5}{2} \neq \sqrt{2-\frac{7}{4}}$$

La solution $l=4$ est la seule possible.
Comme $u_0<4$, ce qui nous arrangerait maintenant c'est que la suite de terme général u_n soit croissante et majorée par 4, on pourrait alors conclure que la suite de terme général u_n est convergente et de limite 4. Montrons ce résultat par récurrence. Pour $u_0 = \frac{11}{4}$ c'est clair $\frac{11}{4} < 4$ Montrons que $u_n < 4$ entraine que $u_{n+1} < 4$

$$u_{n+1} = \frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}} < \frac{5}{2}+\sqrt{4-\frac{7}{4}} = \frac{5}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}+\frac{3}{2} = 4$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{A}}$ est majorée par 4 . Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on aura besoin de montrer, au préalable que pour tout $\in \mathbb{N} u_n > \frac{5}{2}$, pour ce genre de récurrence on peut dire que c'est trivial, on vérifie au passage que la suite de terme général u_n est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ car $u_n > \frac{5}{2} \Rightarrow u_n-\frac{7}{4} > 0$ Regardons maintenant si la suite est monotone :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5}{2}+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}-u_n=\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n+\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)\left(\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$
$$=\frac{\left(\frac{5}{2}-u_n\right)^2-\left(u_n-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{u_n^2-6u_n+8}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}=\frac{(u_n-2)(u_n-4)}{\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}}$$
$\frac{5}{2}<u_n\Rightarrow u_n-2>0$
$u_n<4\Rightarrow u_n-4<0$

$$\frac{5}{2}<u_n\Rightarrow\frac{5}{2}-u_n<0\Rightarrow\frac{5}{2}-u_n-\sqrt{u_n-\frac{7}{4}}<0$$

Par conséquent $u_{n+1}-u_n>0$, la suite est croissante C'est fait, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge vers la seule limite possible $l=4$

Exercice 30 (*)
Pour tout entier $n>0$, on considère la fonction $f_n:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n-(1-x)^2$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
   (a) La fonction f_n est-elle strictement monotone ?
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n\in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n)=0$.
   (c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
2. On considère la suite de terme général $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
4. En déduire que la suite est convergente, on notera α sa limite.
5. Supposons que $\alpha<1$
   (a) Montrer qu'alors
   $$\lim_{n\rightarrow+\infty}(\alpha_n)^n=0$$
   (b) A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n)=0$, en déduire que $1-\alpha=0$, conclure.

<u>**Solution**</u>

1. (a) f_n est définie, continue et dérivable à dérivée continue sur $[0,1]$.
   $$f_n'(x)=nx^{n-1}-2(1-x)(-1)=nx^{n-1}+2(1-x)$$
   Pour $x\in]0,1[, x^{n-1}>0$ et $1-x>0$ donc f_n est strictement croissante.
   (b) $f_n(0)=-1$ et $f_n(1)=1$, d'après 1.a) f_n est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]-1,1[$, donc $0\in]-1,1[$ admet un unique antécédent $\alpha_n\in]0,1[$, c'est-à-dire tel que $f_n(\alpha_n)=0$.
   (c) $f_n(\alpha_n)=0\Leftrightarrow\alpha_n^n-(1-\alpha_n)^2=0\Leftrightarrow\alpha_n^n=(1-\alpha_n)^2$
   $f_{n+1}(\alpha_n)=\alpha_n^{n+1}-(1-\alpha_n)^2=\alpha_n^{n+1}-\alpha_n^n=\alpha_n^n(\alpha_n-1)<0$ car $\alpha_n^n>0$ et $1-\alpha_n<0$
2. (a) La fonction f_{n+1} est une bijection croissante donc
   $$0=f_{n+1}(\alpha_{n+1})>f_{n+1}(\alpha_n)\Leftrightarrow\alpha_{n+1}>\alpha_n$$
   Par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) la suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge.
   (c) i. La suite est croissante alors
   $$0<\alpha_n\leqslant\alpha$$
   Cela entraine que
   $$0<\alpha_n^n\leqslant\alpha^n$$
   Or, si $0\leqslant\alpha<1$ alors la limite de α^n est nulle, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes que
   $$\lim_{n\rightarrow+\infty}\alpha_n^n=0$$
   ii. On a vu au 1.c) que
   $$f_n(\alpha_n)=0\Leftrightarrow\alpha_n^n=(1-\alpha_n)^2$$
   Ce qui entraine, d'après 2.c) i) que
   $$\lim_{n\rightarrow+\infty}(1-\alpha_n)^2=0$$
   Autrement dit que
   $$\lim_{n\rightarrow+\infty}\alpha_n=1$$
   Ce qui signifie que $\alpha=1$, (comme $0<\alpha_n<1$ et que $(\alpha_n)_{n\rightarrow+\infty}$ admet une limite α entraine que $0\leqslant\alpha\leqslant 1$), il y a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha<1$, par conséquent $\alpha=1$.

Exercice 31
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de nombres réels définie par
$$u_n=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{2}$.
<u>**Solution**</u>

$$u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Avec

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Si f admet une limite lorsque $x \to 0$, avec $x \neq 0$ alors cette limite est la même que celle de u_n. Il s'agit d'une forme indéterminée.

Première méthode

On observe que $u_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right) = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}} = \dfrac{g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)}{\frac{1}{n}-0}$, en posant $g(x) = \sqrt{1+x}$

Il s'agit du taux de variation, en 0, de la fonction g, sa limite est $g'(0)$. Comme $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = g'(0) = \dfrac{1}{2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 0$, par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

Deuxième méthode

$\forall n \in \mathbb{N}^* n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right) = n\dfrac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = n\dfrac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = n\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 32 (Convergence d'une somme)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ strictement positif, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

   (b) Montrer que pour tout $n > 0 : v_n > \dfrac{1}{2}$

   (c) Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, alors $v_n < \dfrac{3}{4}$.

   (d) En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$

2. On pose pour tout $n \geqslant 5, S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$ On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est convergente.

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 5$:

   $$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 5$:

   $$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 5 : S_n \leqslant 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante, puis qu'elle converge.

Solution

1. (a) $v_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2}$ On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$

(b) D'après le calcul de v_n : $v_n > \dfrac{1}{2}$.

$$v_n - \frac{3}{4} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} - \frac{3}{4} = \frac{4n^2+8n+4-6n^2}{4n^2} = \frac{-2n^2+8n+4}{4n^2} = -2\frac{n^2-4n-2}{4n^2} = 2\frac{6-(n-2)^2}{4n^2}$$

Or la fonction $x \mapsto 6-(n-2)^2$ est décroissante sur $[2;+\infty[$ et $6-(5-2)^2 = -3$. Donc pour $n \geqslant 5$, $v_n - \dfrac{3}{4} < -3$ donc $v_n < \dfrac{3}{4}$.

(c) Pour $n \geqslant N, v_n < \dfrac{3}{4}$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$

2. Raisonnement par récurrence :

(a) Initialisation : $u_5 \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5-5}$.

(b) Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$u_p \leqslant u_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{p-5}$$

Alors en multipliant par $\dfrac{3}{4}$, on obtient $\dfrac{3}{4}u_p \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p-4}$. Or $u_{p+1} < \dfrac{3}{4}u_p$ d'où $u_{p+1} \leqslant u_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p-4}$.

(c) On additionne les différentes inégalités précédentes.

(d) $1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} = 4\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right) \leqslant 4$

D'où en multipliant par u_5 : $S_n \leqslant 4u_5$.

3. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante. Comme elle majorée (par $4u_5$), elle converge (théorème de la convergence monotone).

FONCTIONS
LIMITES, CONTINUITÉ, DÉRIVATION

Exercice 33 (calcul de limites)
Déterminer les limites de la fonction f définie par $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x+3}$ en $-\infty$, en $-3(x<-3)$, en $-3(x>-3)$, en 0 et en $+\infty$.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
On a également $\lim\limits_{x\to-3} x+3 = 0$

et $\lim\limits_{x\to 3} 2x^2+1 = 10$

$f(x)$ au voisinage de -3 est du signe de $x+3$ donc

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = +\infty$

Exercice 34 (continuité)
Soit une fonction continue de [0 ;1] dans [0 ;1]. On suppose que $f([0;1]) = [0;1]$. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur [0 ;1].

Solution

On pose g telle que $g(x) = f(x) - 1$.
On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$ or $f(0) \in [0;1]$ donc $f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1$ or $f(1) \in [(0;1]$ donc $f(1) \leqslant 0$
g est continue comme f sur $[0;1]$ et $0 \in [f(1); f(0)]$
D'apres le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α de $[0;1]$ tel que $g(\alpha) = 0$
donc $f(\alpha) = \alpha$

Exercice 35 (continuité)
Soit la fonction f définie sur [0 ;2] par $f(x) = 3 - x^3$.

1. Justifier que f est strictement décroissante sur $[0;2]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a une et une seule solution dans $[0;2]$.
3. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de cette solution.

Solution

1. f est dérivable sur $[0;2]$ comme fonction polynôme.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -3x^2$$
Donc $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;2]$.
2. on $f(0) = 3$ et $f(2) = -5$ donc $2 \in [f(2); f(0)]$, de plus f continue et strictement décroissante.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $[0;2]$
3. On a $f(1.44) = 0.014$ et $f(1.45) = -0.486$ donc la solution est comprise entre 1.44 et 1.45.

Exercice 36 (continuité)
Démontrer que l'équation $-x^3 + 3x + 3 = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Solution

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x)(1+x)$.
On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

On constate sur $]-\infty;1]$ que f décroissante puis croissante et admet pour minimum 1, donc elle ne s'annule pas.
Sur $[1;+\infty[$, f est continue, strictement décroissante et $f(1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection, 0 admet un unique antécédent par f donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[1;+\infty[$.
Finalement, sur $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37 (calcul de limites et de dérivées)

1. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ des fonctions f suivantes :

   a) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(-x+1)^3}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^4}$

   d) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2+1})$ e) $f(x) = \ln(\sqrt{2x+1})$ f) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

2. Déterminer les expressions des fonctions dérivée f' de chacune des fonctions.

Solution

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \sqrt{U} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \dfrac{1}{U^3} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(-x+1)^3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \dfrac{1}{U^4} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x^2+1)^4} = 0$

d) Pas de limite....

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{U\to+\infty} \sqrt{U} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$
et $\lim\limits_{V\to+\infty} \ln V = +\infty$
donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{2x+1}) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{U\to-\infty} e^U = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\dfrac{x^2}{2}} = 0$

Exercice 38 (Etude de fonction)
f est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que f est définie sur I.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Dresser le tableau de variation de f sur I.

Solution

1.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \sqrt{U} = +\infty$

   Donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} = +\infty$.

   De même en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3} = +\infty$.

3. $f'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

4. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 39 (Etude de fonction)
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Démontrer que $f(\mathbb{R}) =]0;1]$

Solution
f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
f' est du signe de $-2x$
On détermine aisément que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
On peut dresser son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En remarquant que f est paire, il suffit d'étudier f sur $[0;+\infty[$.
f étant croissante sur $[0;+\infty[$, $f(\mathbb{R}) \subset]0;1]$.
On souhaite montrer que $]0;1] \subset f(\mathbb{R})$ Soit $y \in]0;1[$, on a $y \in]\lim\limits_{+\infty} f; f(0)]$, de plus f est continue sur $]\lim\limits_{+\infty} f; f(0)]$ donc il existe un réel x sur $]\lim\limits_{+\infty} f; f(0)]$ tel que $f(x) = y$.
Donc $]0;1] \subset f(\mathbb{R})$ et $]0;1] = f(\mathbb{R})$

Exercice 40 (Fonction auxiliaire)
Soit f la fonction définie sur $I = [0;1]$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Montrer que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à I.
2. Soit u_n la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
3. On va étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de deux manières différentes. Première approche dans cette question :
   (a) Etudier le signe de $-x^2 - x + 2$ sur I
   (b) Etudier le sens de variation de la suite u.
4. Deuxième approche : Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle, définie et donc dérivable sur I.
   On définit les fonctions u et v par :
   pour tout réel x, $u(x) = 3x+2$ et $v(x) = x+4$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{u(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{3(x+4) - 1(3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$
   Donc $\forall x \in I, f'(x) > 0$
   Donc f est une fonction strictement croissante sur I.
   Pour $x \in I$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc, comme f est strictement croissante sur I, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{5}$ comme $0 \leqslant \dfrac{1}{2}$, $f(x) \in I$.

2. On définit la propriété P, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $P_n : u_n \in I$
   - Initialisation

   On a $u_0 = 0$ donc $P_0 : u_0 \in I$ est vraie.
   - Hérédité

   Soit $k \in \mathbb{N}$

   On veut montrer que si $P_k : u_k \in I$ est vraie alors $P_{k+1} : u_{k+1} \in I$

   On suppose que $u_k \in I$. D'après la propriété de la question 1) on a $f(u_k) \in I$ donc $u_{k+1} \in I$ donc P_{k+1} est vraie.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$
3. (a) On reconnaît un trinôme avec $a = -1$, $b = -1$ et $c = 2$. 1 est une racine évidente : $-x^2 - x + 2 - (-1^2 - 1 + 2) = (-x^2 + 1) + (-x + 1) = (1 - x)(x + 1 + 1) = (1 - x)(x + 2)$. Ce trinôme a deux racines : 1 et -2. Comme $a < 0$ ce trinôme est positif sur $[-2; 1]$ donc positif sur I.

   Donc $\forall x \in I, -x^2 - x + 2 \geqslant 0$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$

   D'après 3) a), $-u_n^2 - u_n + 2 \geqslant 0$ et $u_n + 4 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc u est croissante.
4. On définit la propriété P, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $P_n : u_{n+1} \geqslant u_n$
   - Initialisation

   On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$donc $P_0 : u_1 \geqslant u_0$ est vraie.
   - Hérédité

   Soit $k \in \mathbb{N}$

   On veut montrer que si $P_k : u_{k+1} \geqslant u_k$ est vraie alors $P_{k+1} : u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$

   On suppose que $u_{k+1} \geqslant u_k$. Comme f est croissante, $f(u_{k+1}) \geqslant f(u_k)$ donc $u_{k+2} \geqslant u_{k+1}$ donc P_{k+1} est vraie.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc u est croissante.

Pour aller plus loin ...

Exercice 41 (Fonction auxiliaire)

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x}$. Montrer que pour tout x de $I = [2; 3]$, $f(x)$ est dans I.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Cette suite est-elle monotone ?

Solution

1. f est dérivable sur I comme somme de fonction dérivable et $\forall x \in I, f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x) < 0$ sur I et f est strictement décroissante sur I donc $\forall x \in I, 2 \leqslant x \leqslant 3$ donc $f(2) \geqslant f(x) \geqslant f(3)$ donc $\dfrac{7}{3} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{2}$
   donc $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$ car $2 < \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{5}{2} < 3$
   donc $f(x) \in I$
2. On définit la propriété P, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $P_n : u_n \in I$
   • Initialisation
   On a $u_0 = 2$ donc $u_0 \in I$ donc P_0 est vraie.
   • Hérédité
   Soit $k \in \mathbb{N}$
   On suppose que $u_k \in I$.
   D'après la propriété de la question 1, $f(u_k) \in I$ or $u_{k+1} = f(u_k)$
   donc $u_{k+1} \in I$
   donc P_{k+1} est vraie.
   • Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
3. On a $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $u_2 = \dfrac{12}{5}$ donc $u_1 > u_2$ et $u_1 > u_0$ donc la suite n'est ni croissante, ni décroissante. Elle n'est pas monotone.

Exercice 42

(Position relative) Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$.

Déterminer une asymptote de $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f en $-\infty$ et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Solution

On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2+1}{x^2-3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

On a $f(x) - x = \dfrac{x^2 + 1 - x^2 + 3x}{x-3} = \dfrac{1+3x}{x-3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+3) = 0$

Donc la droite d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe de f.

De plus $f(x) - (x-3) = \dfrac{1+3x}{x-3} - 3 = \dfrac{10}{x-3}$ est du signe de $x - 3$

donc sur $]-\infty; 3[$, la courbe est au dessous de l'asymptote, sinon, elle est au-dessous.

Exercice 43

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas dérivables en 0 : fonction racine carrée, valeur absolue.

Solution

1. Fonction racine carré
   On construit le taux de variation de la fonction racine carré entre 0 et h
   $T_0(h) = \dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$
   Or $lim_{x \to 0} T_0(h) = +\infty$ donc la limite du taux n'est pas finie donc la fonction $\sqrt{}$ n'est pas dérivable en 0.

2. Fonction valeur absolue.

   On construit le taux de variation de la fonction valeur absolue entre 0 et h.

   $T_0(h) = \dfrac{|h| - 0}{h - 0} = \dfrac{|h|}{h}$

   Si $h > 0$, $T_0(h) = 1$ donc la limite est 1.

   Si $h < 0$, $T_0(h) = -1$ donc la limite est -1. Donc le taux n'admet de limite en 0

   Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 44

Soit la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Démontrer que la fonction f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$

Solution

Exercices Continuité - Dérivation

Exercice 3

$f(x) = x\sqrt{x}$

La fonction f est le produit de deux fonctions u et v.

$u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc uv est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$

Comme $uv = f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En 0 : Comme u et v sont continues en 0, f est continue en 0.

f est-elle dérivable en 0 ?

Soit $h > 0$, on construit le taux de variation.

$T_0(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$

$\lim_{h \to 0} \sqrt{h} = 0$ donc $\lim_{h \to 0} T_0(h) = 0$

Donc f est dérivable en 0.

Finalement f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$

Exercice 45

Soit la fonction f défine par $\begin{cases} \text{Pour } x \neq 0, f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \\ \text{Pour } x = 0, f(0) = m \end{cases}$

1. Déterminer m pour que f soit continue en 0.
2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

Exercice 4

1) $\forall x \neq 0, \quad f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x}$

$= \dfrac{1 - (x^2+1)}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$

$= \dfrac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

Donc $\lim_{0} f = 0$ (car $\lim_{x \to 0} x^2+1 = 1$

et $\lim_{u \to 1} \sqrt{u} = 1$

donc par composition $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+1} = 1$

On pose $m = 0$ pour que f soit continue.

2) Comme $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, par composition $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opération (somme et quotient de fonctions), f est dérivable pour tout réel non nul.

En 0, le taux est

$\forall x \neq 0, \quad T_0(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

$= -\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$

Comme précédemment

$\lim_{x \to 0} T_0(x) = -\dfrac{1}{2}$

Donc f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{x\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-x^2 + x^2 + 1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

On remarque que f' est continue.

Exercice 46

Soit la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Déterminer la dérivée de f.

Solution

Exercice 6

1) f est définie sur $[-1;1]$.

On pose $u : x \mapsto 1-x^2$

$v : x \mapsto \sqrt{x}$

$w : x \mapsto 1-x$

u est dérivable sur $]-1;1[$ et à valeurs dans $]0;1]$

v est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc sur $]0;1]$

Donc $v \circ u$ est dérivable sur $]-1;1[$

Comme w est dérivable sur $]-1;1[$,

f est dérivable sur $]-1;1[$ comme produit de fonctions dérivables.

En 1 : On construit le taux :

$$\forall h<0,\ T_1(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-h\sqrt{1-(1+h)^2}}{h}$$

$$= -\sqrt{-2h-h^2}$$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} T_1(h) = 0$ donc f est dérivable en 1 de dérivée 0.

En -1 $\quad \forall h>0,\ T_{-1}(h) = \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

Donc $T_{-1}(h) = \dfrac{(2-h)\sqrt{1-(-1+h)^2}}{h}$

$$= \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h}$$

$$= \frac{(2-h)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$$

Donc par composition (abrégé) et opération

$\lim\limits_{h\to 0} T_{-1}(h) = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en -1.

$$\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = -\sqrt{1-x^2} + (1-x)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-1+x^2-x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

On remarque que $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 0$

donc f' est continue en 1.

Exercice 47

Démontrer la dérivabilité des fonctions suivantes, déterminer leur nombre dérivé et une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

1. f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$
2. h définie par $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+2)^3}$

3. g définie par $g(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$
4. k définie par $k(x) = \cos\sqrt{x^2+1}$

Solution

Exercice 4

1) $\forall x \neq 0, \quad f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$= \frac{1-(x^2+1)}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

Donc $\lim\limits_{0} f = 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} x^2+1 = 1$

et $\lim\limits_{u\to 1} \sqrt{u} = 1$

donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+1} = 1$

On pose $m = 0$ pour que f soit continue.

2) Comme $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, par composition $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opération (somme et quotient de fonctions), f est dérivable pour tout réel non nul.

En 0, le taux est

$\forall x \neq 0, \quad T_0(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

$$= -\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

Comme précédemment

$\lim\limits_{x\to 0} T_0(x) = -\dfrac{1}{2}$

Donc f est dérivable en 0 donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) $\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{x\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-x^2+x^2+1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

On remarque que f' est continue.

Exercice 48

Les affirmations suivantes sont fausses. Trouver un contre-exemple à chacune d'elle.

1. Si f est une fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\lim f(x) = +\infty$.
3. Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim f(x) = +\infty$ alors f est positive sur $[0; +\infty[$.

Solution

1. FAUX : $f : x \mapsto x^3 - 2x$, $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$ donc f n'est pas croissante.

2. FAUX : f définit sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   et f impaire.

   $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

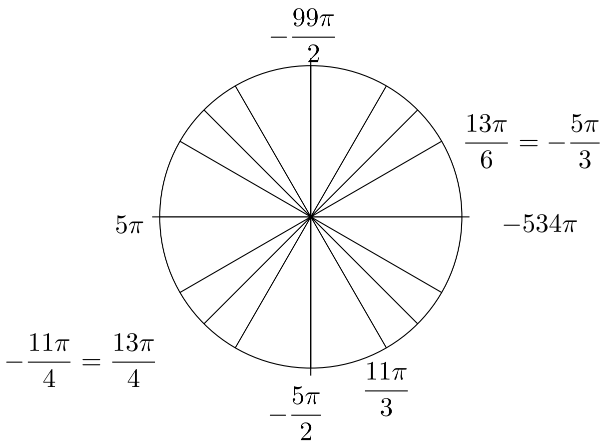
3. FAUX : $h : x \mapsto x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de f	↘	0	↘ -1	↗	

Trigonométrie
Fonctions Sinus et Cosinus

Exercice 49
Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants :
$5\pi, -\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{3}, -\dfrac{11\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{6}, -\dfrac{5\pi}{3}, -534\pi, -\dfrac{99\pi}{2}$

Solution



Exercice 50
On pose $\sin\dfrac{\pi}{10} = m$. Exprimer en fonction de m :

a. $\sin\dfrac{9\pi}{10}$ b. $\sin\dfrac{11\pi}{10}$ c. $\cos\dfrac{4\pi}{10}$ d. $\cos\dfrac{6\pi}{10}$

Solution

a) $\sin\dfrac{9\pi}{10} = \sin\left(\pi - \dfrac{9\pi}{10}\right) = \sin\dfrac{\pi}{10} = m$

b) $\sin\dfrac{11\pi}{10} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{10}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{10} = -m$

c) $\cos\dfrac{4\pi}{10} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right) = \sin\dfrac{\pi}{10} = m$

d) $\cos\dfrac{6\pi}{10} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{10}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{10} = -m$

Exercice 51
Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$

a) $\cos(x + 3\pi)$ b) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)$ c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $\cos(-x - \pi)$

e) $\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ f) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ g) $\cos(x - 5\pi)$ h) $\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

i) $\sin(x + 3\pi)$ j) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right)$ k) $\sin(x - 5\pi)$

Solution

a) $\cos(x + 3\pi) = \cos(x + 2\pi + \pi) = \cos(x + \pi) = \cos x$

b) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

c) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

d) $\cos(-x - \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x$

e) $\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\pi-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

f) $\sin\left(x+-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$

g) $\cos(x-5\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos x$

h) $\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\pi-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin x+\dfrac{\pi}{2}=\cos x$

i) $\sin(x+3\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x$

j) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

k) $\sin(x-5\pi)=-\sin x$

Exercice 52
Démontrer que pour tout réel x : $\sin x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
Solution
$\sin x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x-\sin x+\cos x-\cos x=0$

Exercice 53 1. Résoudre dans]- $\pi;\pi$] l'équation $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
3. Résoudre dans $]0;2\pi]$ l'équation $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.
4. Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $\sin x=\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Solution

1. $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
   On a donc $S=\left\{\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right\}$
2. $\cos x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
   On a donc $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right\}$
3. $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
   Or $-\dfrac{2\pi}{3}\notin[0;2\pi[$
   On a donc $S=\left\{\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right\}$
4. $\sin x=\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
   On a donc $S=\left\{\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Exercice 54
Transformer chacune des équations suivantes en utilisant les formules des angles associées, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\cos x=\sin x$ b) $\sin 2x=\cos x$ c) $\cos 3x=\sin x$

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1$ e) $\sin 3x=-\sin 2x$

Solution

a) $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{\pi}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos 3x = \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $3x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Donc $S = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

e) $\sin 3x = -\sin 2x$

Exercice 55
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$

1. (a) Exprimer $f(-x)$ et $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   (b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $\mathrm{I} = [0; \pi]$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x, et étudier son signe sur I.
3. Dresser le tableau de variation de f sur I, puis tracer la courbe représentative de f sur I et la compléter sur $[-\pi; 0]$, puis sur $[\pi; 3\pi]$

Solution

1. (a) $f(-x) = \frac{1}{2 + \cos(-x)} = \frac{1}{2 + \cos x} = f(x)$.
   (b) Donc on peut étudier sur $[0; +\infty[$ et en déduire les variations sur $]-\infty; 0]$ par symétrie.
   $$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{2 + \cos x} = f(x)$$
   Donc on peut étudier f sur une période, por exemple $[-\pi; \pi]$ et par symétrie sur $[0; \pi]$.
2. On a $2 + \cos x \geqslant 1$ donc f est définie et dérivable sur I comme quotient de fonction dérivables. $f'(x) = \frac{-\sin x}{(2 + \cos x)^2}$ donc $[0; \pi], f'(x) \geqslant 0$ donc f croissante avec $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$.
3.

Exercice 56
Etudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$. $g(x) = \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}$ **Solution**
On a $g(x + 2\pi) = g(x)$ et $g(-x) = g(x)$
On peut étudier g sur $[0; \pi]$.
g est dérivable sur $[0; \pi]$ comme quotient de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0; \pi], g'(x) = \frac{(2 + \cos x)(\sin n) - (2 - \cos x)(-\min)}{(2 + \cos x)^2}$ donc $g'(x) = \frac{4 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$

x	0		π
signe de $g'(x)$	0	$+$	0
variation de g	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	3

Pour aller plus loin ...

Exercice 57

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

a) $2\sin x - \sqrt{3} \geqslant 0$ b) $2\cos x + \sqrt{3} \leqslant 0$ c) $1 - 2\sin x \geqslant 0$ d) $1 + 2\cos x \geqslant 0$

Solution

a) $2\sin x - \sqrt{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x \geqslant \sin\dfrac{\pi}{3}$

$S = \left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

b) $2\cos x + \sqrt{3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x \leqslant \cos\dfrac{5\pi}{6}$

$S = \left]-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$

c) $1 - 2\sin x \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \leqslant \sin\dfrac{\pi}{6}$

$S = \left]-\pi;\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$

d) $1 + 2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \geqslant \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$S = \left]-\pi;-\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$