TD1 [1] : Normes, distances et boules

Exercice 1 : Normes de $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|)$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

   <u>Indication :</u> pour $\|\cdot\|_2$, on utilisera l'inégalité de Schwarz admise ici

   $$|\langle u|v\rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$$

   où $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ avec $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$.

2. Démontrer que pour $\forall a, b \geq 0$: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
3. Généralisation : montrer que

   $$\forall a_1, ..., a_n \geq 0, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$$

4. En déduire que pour $\forall x, \ \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
5. Démontrer que

   $$\forall x, \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

6. Les 3 normes sont-elles équivalentes ?
7. Représenter, pour $\mathbb{R}^2$, la boule fermée unité $\overline{B}\Big(a = (0,0), r = 1\Big)$ pour chacune de ces normes.

1. Les sujets de TD sont en grande partie issus des TD de Jean-Michel Masereel. De plus les TD de M. Masereel contiennent un plus grand nombre d'exercices, n'hésitez donc pas à vous en procurer les énoncés.

Exercice 2 : Norme sur $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit $a_1,\ a_2, ...,\ a_n \in \mathbb{R}$. Soit N une application de $E \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ N(x) = a_1|x_1| + a_2|x_2| + ... + a_n|x_n|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 : Norme sur l'espace des matrices carrées

Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $\forall a$, on définit les deux applications

$$\begin{aligned} N_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow N_1(a) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow N_2(a) = \sqrt{Tr({}^t aa)} \end{aligned}$$

1. Montrer que ces deux applications sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 : Norme sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit les applications suivantes $\forall f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} (|f(x)|)$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes (on admettra que $\|\cdot\|_2$ est bien une norme).
2. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?
3. Déduire que E n'est pas un espace de dimension finie.

Exercice 5 : Norme sur $\mathbb{R}^2$

Soient $a, b > 0$. On pose pour $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(X) = N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

1. Montrer que $N(x, y) = N(X)$, avec $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, est une norme sur $\mathbb{R}^2$. *(utiliser l'inégalité de Schwarz donnée dans l'exercice 1 de ce TD)*
2. Dessiner la boule fermée unité $\overline{B}\Big(a = (0, 0), r = 1\Big)$ *(cette question est à traiter si la notion de boule a déjà été définie en cours).*
3. Trouver le plus grand réel q et le plus petit réel p tels que

$$q \left\|\cdot\right\|_1 \leq N \leq p \left\|\cdot\right\|_2$$

Exercice 6 : Norme sur l'espace des polynômes

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ (espace des polynômes de degré n). On définit

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow \|P\| = \sup_{k \in [\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)| \end{aligned}$$

où $P^{(k)}$ est la dérivée $k$ème de P, et

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow N(P) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^n} \end{aligned}$$

1. Montrer que N est bien définie.
2. Montrer que ces deux applications sont des normes.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall P \in E, \|P\| \leq CN(p)$$

Exercice 7 : "3ème inégalité triangulaire"

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour $\forall x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$$

Exercice 8 : Autre norme

Soit l'application N de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $N(x, y) = 4|x| + |y|$.

1. N est-elle une norme ?
2. Dessiner la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Quelles sont ses symétries ?
3. En toute généralité quelle est la symétrie d'une boule fermée.

Exercice 9 : A propos des distances

Dans cet exercice on définit des applications d_i de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans la suite $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
d_1 : \; & (x, y) \longrightarrow d_1(x, y) = (x - y)^2 \\
d_2 : \; & (x, y) \longrightarrow d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \\
d_3 : \; & (x, y) \longrightarrow d_3(x, y) = |x^2 - y^2| \\
d_4 : \; & (x, y) \longrightarrow d_4(x, y) = |x - 2y| \\
d_5 : \; & (x, y) \longrightarrow d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \\
d_6 : \; & (x, y) \longrightarrow d_6(x, y) = |x^3 - y^3|
\end{aligned}$$

Ces applications sont-elles des distances ? Sont-elles associées à des normes ?

TD2 : Ouverts et fermés

Exercice 1 : Normes équivalentes et notions d'ouvert et fermé

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

1. Soit $B_{\|\cdot\|_1}(a,r) = \{x \in E / \|x-a\|_1 < r\}$. Montrer qu'il existe r' tel que
$$B_{\|\cdot\|_1}(a,r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(a,r')$$
où $B_{\|\cdot\|_2}(a,r') = \{x \in E / \|x-a\|_2 < r'\}$.

2. Soit $B_{\|\cdot\|_2}(a,r'') = \{x \in E / \|x-a\|_2 < r''\}$. Montrer qu'il existe r''' tel que
$$B_{\|\cdot\|_2}(a,r'') \subset B_{\|\cdot\|_1}(a,r''')$$
où $B_{\|\cdot\|_1}(a,r''') = \{x \in E / \|x-a\|_1 < r'''\}$.

3. En déduire qu'un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$ et réciproquement.

4. Même question pour les fermées.

Exercice 2 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une boule fermée n'est pas un ouvert.
2. Montrer qu'une boule ouverte n'est pas un fermé.

Exercice 3 :

Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts, des fermés, les deux ou aucun des deux.

1. $A = [0, 1[$
2. $C = [0, +\infty[$
3. $D =]0, 1[\cup \{2\}$
4. $E = \mathbb{N}$
5. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 < 4\}$
6. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 2\}$
7. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < |x - 1| < 1\}$
8. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
9. $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$

Exercice 4 : Ensemble ouvert et majoré

Soit A un ouvert majoré de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Montrer que A ne contient pas son majorant.

Exercice 5 : Somme d'ensembles

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On introduit l'ensemble

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$

1. Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6 : Produit cartésien

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\|\cdot\|_{E\times F}$ l'application définie sur $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{E\times F}$ est une norme.
2. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont des ouverts alors $A \times B$ est un ouvert.
3. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont des fermés alors $A \times B$ est un fermé.

TD3 : Intérieur et Adhérence

Exercice 1 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles tels que

$$A \subset B \subset E \text{ et } B \text{ fermé}$$

1. Montrer alors que pour $\forall x \in C_E B$

$$\exists r > 0 \ / \ B(x,r) \cap A = \emptyset$$

2. Peut-on alors avoir $\overline{A} = B$ et si oui sous quelles conditions ?

Exercice 2 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles tels que

$$B \subset A \subset E \text{ et } B \text{ ouvert}$$

1. Montrer alors que pour $\forall x \in B$

$$\exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$

2. Peut-on alors avoir $\mathring{A} = B$ et si oui sous quelles conditions ?

Exercice 3 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Déterminer l'intérieur et l'adhérent de

1. l'ensemble A qui est la boule fermée de rayon r et de centre a
2. l'ensemble A qui est la boule ouverte de rayon r et de centre a

Exercice 4 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles de E. Montrer que

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$
4. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

Exercice 5 :

Déterminer l'adhérent et l'intérieur des ensembles donnés dans l'exercice 3 du TD2.

TD4 : Suites

Exercice 1 :

Donner un exemple de suite complexe $z_n = x_n + iy_n$ n'ayant aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$ mais telle que les suite x_n et y_n en aient dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit u_n et v_n deux suites réelles telles que $u_n - v_n$ converge vers 0. Montrer que u_n et v_n ont les mêmes valeurs d'adhérences.

Exercice 3 :

Donner des exemples de suites ayant :

1. aucune valeur d'adhérence.
2. une unique valeur d'adhérence.
3. deux valeurs d'adhérence.
4. trois valeurs d'adhérence.
5. une unique valeur d'adhérence mais la suite ne converge pas.

Exercice 4 :

Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts, des fermés, les deux ou aucun des deux. Déterminer également leur adhérence.

1. $A = [0, 1[$
2. $C = [0, +\infty[$
3. $D =]0, 1[\cup \{2\}$
4. $E = \mathbb{N}$
5. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < |x - 1| < 1\}$ (que fermé)
6. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
7. $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$ (que ouvert)

TD5 : Limites et Continuités

Exercice 1 :

1. Montrer que si x et y sont des réels alors $2|xy| \leq x^2 + y^2$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in A$, on a :

$$|f(x,y)| \leq \frac{7}{2} \|(x,y)\|_2 \text{ avec } \frac{7}{2} \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   (b) En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 2 :

Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$
2. $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$
3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$
8. $f(x,y) = \frac{x+3y}{x^2-y^2}$
9. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$
10. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
11. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
12. $f(x,y) = x^y$
13. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x) \ , \ \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{pour } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{pour } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 4 :

1. On considère la fonction f_1 définie par
$$\begin{aligned} f_1 : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) \end{aligned}$$
Déterminer si f_1 admet une limite en $(0,0)$.
2. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \neq 0\}$. On considère la fonction
$$\begin{aligned} f_2 : \ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$
Déterminer si f_2 admet une limite en $(0,0)$.

Exercice 5 :

La fonction suivante est-elle continue ?

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{pour } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{pour } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-|y|/x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

1. Soit λ un réel et $A_\lambda = \{(x, \lambda x) / x \in \mathbb{R}\}$. On note f_λ la restriction de f à A_λ. Calculer la limite de f_λ en $(0,0)$.
2. Soit $B = \{(x, x^2) / x \in \mathbb{R}\}$. On note g la restriction de f à B. Calculer la limite de g en $(0,0)$.
3. Que peut-on dire de la continuité de f en $(0,0)$.

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions, étudier sa continuité en $(0,0)$.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si} & (x;y) = (0;0) \end{array} \right. \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si} & (x;y) = (0;0) \end{array} \right. \end{array} \right.$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2} & \text{si} & x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \text{ OU } y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

TD6 – 7 : Limites, Continuités et Compacité

Exercice 1 :

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables en $(0,0)$ sur leur domaine de définition D ?

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$, $f(x,y) = \frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y}$
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$, $f(x,y) = \frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}$
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq \pm y\}$, $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2-y^2}$
4. $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Exercice 2 :

Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$

Exercice 3 :

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $||\cdot||$ est 1-lipschitzienne de $(E, ||\cdot||)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 4 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $||\cdot||_1$ définie par

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

Etudier la continuité de la forme linéaire ϕ de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$$

Exercice 5 :

1. Rappeler la définition de la continuité uniforme.
2. Quelle est la négation de la continuité uniforme.
3. Soit a, b deux réels positifs tels que $a < b$. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[a, b]$.
4. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
6. Montrer que la fonction $\ln(x)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{max(1, \|x\|)}$$

1. Dessiner le graphe de f pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que f est bornée sur E.
3. Montrer que f est continue sur E.
4. Montrer que f est 2-lipschitzienne sur E.

Exercice 7 :

Pour chaque sous-ensemble suivant, indiquer si il s'agit de compact ou non.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 = 1\}$
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^5 = 1\}$
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x(1 - 2x)\}$

Exercice 8 :

Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K,\ ||f(x) - x|| \geq ||f(c) - c||$$

3. En déduire que f admet un point fixe.

TD8 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 :

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = e^x \cos(y)$
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$

Exercice 2 : Calculs bêtes et méchants

Soit un gaz de molécules. Ce gaz, de volume V, de température T et soumis à la pression P, contient n moles.

1. On commence par décrire ce gaz par la loi des gaz parfait : $PV = nRT$ où R est la constance des gaz parfaits. Montrer alors que
$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \qquad\qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = nR$$
2. Une meilleur approximation des gaz a été proposé à la fin du 19ième siècle par Van Der Waals
$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT$$
où $a,\ b$ sont deux constantes positives. Calculer $\frac{\partial T}{\partial P}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.

Exercice 3 :

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sans se préoccuper de leur domaine de définition

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y) = \ln(xy)$
3. $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$
6. $f(x,y) = \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$
8. $f(x,y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
9. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{3}}$
10. $f(x,y) = x^y$ (avec $x > 0$)
11. $f(x,y) = \cos\left(x+y^2\right)$
12. $f(x,y) = e^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$
13. $f(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$
14. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$
15. $f(x,y,z) = x^2yz^3+xy-z$
16. $f(x,y,z) = x\sqrt{yz}$
17. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$
18. $f(x,y,z,t) = \frac{x-y}{z-t}$
19. $f(x,y,z,t) = xy^2z^3t^4$
20. $f(x,y) = y^5-3xy$
21. $f(x,y) = x^2+3xy-6y^5$
22. $f(x,y) = x\cos\left(e^{xy}\right)$
23. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
24. $f(x,y) = x^y$
25. $f(x,y,z) = x\cos(xz)+\ln(2-\sin^2(y+z))$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions d'une variable réele à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des fonctions de deux variables F_i suivantes, déterminer les dérivées partielles en fonction des dérivées f' et g'

1. $F_1(x,y) = f(x)+g(y)$
2. $F_2(x,y) = f(x)g(y)$
3. $F_3(x,y) = \frac{f(x)}{g(y)}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Exercice 6 :

Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \min(x,y^2)$ avec $x,y \geq 0$.

Exercice 7 :

Etudier la continuité des fonctions suivantes ainsi que l'existence et la continuité de leurs dérivées partielles premières

1.
$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

2.
$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3}$$

3.
$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Exercice 8 : Interprétation de la différentielle

Le but de cet exercice est de montrer le lien qui existe entre la différentielle d'une fonction et ses variations. Pour cela, nous allons introduire le calcul d'incertitude.

On considère une résistance R traversée par le courant électrique I. On sait que la puissance dissipée sous forme de chaleur E_J par cette résistance est donnée par
$$E_J = RI^2$$

1. Considérons tout d'abord que l'on connait parfaitement la résistance R mais que l'intensité n'est connue qu'à une incertitude près ΔI (où ΔI est considéré comme très petit devant I). Déterminer l'incertitude ΔE_J sur E_J. Relier cela à la différentielle d'une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On considère maintenant que l'on a également une incertitude ΔR sur la résistance en plus de l'incertitude ΔI sur l'intensité I. Déterminer l'incertitude sur E_J.

Exercice 9 :

1. Soit a un réel non nul. Etudier la différentiabilité au point $(a,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+|y|} \tag{5}$$

2. Discuter selon la valeur du réel α de la différentiabilité au point $(0,0)$ de

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{x^2+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

Exercice 10 :

Étudier la continuité et la différentiabilité puis calculer le gradient (lorsqu'il existe) des fonctions suivantes

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3+xy \end{array} \right.$

2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{array} \right.$

3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} U = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 < 1\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \ln(1-x^2-y^2) \end{array} \right.$

4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} U = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \geq 1\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array} \right.$

5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} \end{array} \right.$

6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \end{array} \right.$

7. $f_7 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} & \end{array} \right. \end{array} \right.$

8. $f_8 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y} & \text{si} & x \neq y \\ \cos(x) & \text{si} & x = y \end{array} \right. \end{array} \right.$

TD9 – 10 :

Exercice 1 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1+t^2)$. Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Soit $f(x, y) = xy$ une fonction dépendant des variables x et y qui sont paramétrées par t :
$$x(t) = \cos(t) \qquad y(t) = \sin(t) \tag{7}$$
Détemriner $g'(t)$ où $g(t) = f\Big(x(t), y(t)\Big)$ explicitement puis en utilisant la relation donnée dans la Prop D1 du cours.
3. Soit $(x_1, ..., x_n, h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose alors
$$g(t) = f(x_1 + th_1, ..., x_n + th_n) \tag{8}$$
Calculer $g'(t)$

Exercice 2 :

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit la fonction g définie par
$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv) \tag{9}$$

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles de g (par rapport à u et v) en fonction des dérivées partielles de f (par rapport à x et y).

Exercice 3 :

Soit $f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)$ différentiable et $g : (\rho, \theta) \longrightarrow f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. En déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
4. Vérifier les résultats des deux questions précédentes sur la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$.

Exercice 4 :

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+t, y+t) = f(x,y) \tag{10}$$

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$$

Exercice 5 :

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(xt, yt) = f(x,y) \tag{11}$$

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 \tag{12}$$

Exercice 6 :

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \Big(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}; (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})\Big) \tag{13}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le jacobien de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Qu'en déduit-on pour f ?

Exercice 7 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point, θ un réel et $g\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \Big(x\cos(\theta) - y\sin(\theta)\ ;\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta)\Big) = \Big(u(x,y)\ ;\ v(x,y)\Big) \tag{14}$$

1. Montrer que la fonction $F = f \circ g$ admet des dérivées partielles en tout point.
2. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 8 :

On cherche toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, telles que

$$(E)\ :\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + 2x\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 \qquad (15)$$

On considère l'application φ qui associe à $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ $\varphi(u,v) = (u, v+u^2)$.

1. Montrer que φ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Que peut-on en déduire pour φ ?
4. On introduit maintenant la fonction définie par $g = f\circ\varphi$
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si
   $$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0 \qquad (16)$$
5. En déduire que $f(x,y) = h(y-x^2)$, où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est solution de (E).

Exercice 9 :

Résoudre les équations aux dérivées partielles du premier ordre suivantes d'inconnue $f\ :\ U\longrightarrow\mathbb{R}$ à l'aide du changement de variables fourni

1. $U = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; changement de variables : $(u,v) = (x, y/x)$.
2. $U = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4+y^4}$; changement de variables : $(u,v) = (y/x, x^2+y^2)$.
3. $U = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$; changement de variables : $(u,v) = (x, yx)$.
4. $U = \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = af$; $a\in\mathbb{R}$; changement de variables : coordonnées polaires.

Exercice 10 :

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^2$, alors f est différentiable en tout point.
2. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\overrightarrow{\text{grad}} f$ existe en tout point.
3. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ alors f est continue.
4. Si f est différentiable en tout points, alors $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $\overrightarrow{\text{grad}} f$ existe en tout point, alors $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
6. Si f est continue alors $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
7. Si f est différentiable en $(x_0 ; y_0)$, alors $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ existe.
8. Si f est différentiable alors f est continue.
9. Si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)$ existe, alors f est différentiable en $(x_0 ; y_0)$.
10. Si f est continue alors f est différentiable.
11. Si f est continue alors $\overrightarrow{\text{grad}} f$ existe en tout point.
12. Si $\overrightarrow{\text{grad}} f$ existe en tout point alors f est continue.

Exercice 11 :

On cherche toutes les fonctions de g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, $\forall(x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x,y)} = a$$

où a est un réel.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. En utilisant le théorème de composition, montrer que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \frac{a}{2}$$

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 12 :

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes

1. $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$
   Indication : On utilisera le changement de variables $u = x + y$ et $v = x + 2y$.
2. $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$
   Indication : On passera en coordonnées polaires.

Exercice 13 :

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ les équations aux dérivées partielles suivantes

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ avec $(u;v) = (2x+y;3x+y)$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f$ avec $(u;v) = (x;y-x)$.
3. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$, en coordonnées polaires.
4. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, en coordonnées polaires.
5. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, en coordonnées polaires.

TD11 − 12 :

Exercice 1 :

Déterminer les fonctions f solutions des systèmes suivants

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y \end{cases} \tag{17}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{18}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \tag{19}$$

Exercice 2 :

Pour toutes les fonctions suivantes, calculer l'expression de toutes les dérivées secondes en précisant les domaines d'existance

1. $f(x,y) = x^2y + x\sqrt{y}$
2. $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$
3. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$
4. $f(x,y) = \cos^2(5x+2y)$
5. $f(x,y) = x^2(x+y)$
6. $f(x,y) = \cos(xy)$

Exercice 3 :

Pour chaque fonction déterminer la dérivée partielle indiquée

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$: $f(x,y) = x^2y^4 + 2x^4y$
2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$: $f(x,y) = e^{xy^2}$
3. $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$: $f(x,y,z) = x^5 + 4x^4y^4z^3 + yz^2$
4. $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$: $f(x,y,z) = e^{xyz}$
5. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$: $u(x,y,z) = \ln(x + 2y^2 + 3z^2)$

Exercice 4 :

Vérifier le théorème de Schwarz sur les fonctions suivantes

1. $f(x,y) = x^5y^4 - 3x^2y^3 + 2x^2$
2. $f(x,y) = \sin^2(x)\cos(y)$

Exercice 5 :

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On définit le laplacien de f comme étant l'application définie sur U par

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{20}$$

Déterminer le laplacien de chacune des fonctions suivantes

1. $U = \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 - y^2$
2. $U = \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
4. $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{21}$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas même valeur.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{22}$$

   (a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

(b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ et ont même valeur.

(c) Que peut-on en déduire ?

2. Mêmes questions pour

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{23}$$

Exercice 8 :

Déterminer la classe exacte des applications suivantes

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{24}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+(y-x^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{25}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{x^2}-1)(e^{y^2}-1)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{26}$$

Exercice 9 :

Résoudre les EDP du second d'ordre d'inconnue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à l'aide du changement de variables fourni

1. $U = \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,;\ (u,v) = (x+y, x-y)$
2. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,;\ (u,v) = (x, y/x)$
3. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,;\ (u,v) = (xy, y/x)$
4. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,;\ (u,v) = (\ln(x), \ln(y))$
5. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,;\ (u,v) = (x^2 - y, x^2 + y)$
6. $U = \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,;\ (u,v) = (x, x+y)$
7. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,;\ (u,v) = (xy, x/y)$

Exercice 10 :

Déterminer les points critiques et les extrema des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
6. $f(x,y) = x\Big(\ln^2(x) + y^2\Big)$ (sur le demi-plan > 0)

Exercice 11 :

Déterminer les extrema locaux et globaux des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & -3x^2y + 2x^4 \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (x+y)^2 - (x^4 + y^4) \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 3xy - x^3 - y^3 \end{cases}$
7. $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 9xy + 27 \end{cases}$
8. $f_8 : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x\ln(y) - y\ln(x) \end{cases}$
9. $f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y \end{cases}$
10. $f_{10} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5 \end{cases}$
11. $f_{11} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 + y^3 \end{cases}$
12. $f_{12} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (x-y)^2 + (x+y)^3 \end{cases}$
13. $f_{13} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{cases}$

Exercice 12 :

On considère l'application $g : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \end{cases}$

1. Déterminer les extrema locaux de g.
2. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geq 1$.
   b) Montrer que $\forall (x\,;y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ g(x,y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$.
   c) En conclure que les extrema locaux de g sont globaux.