Correction des TDs d'analyse dans $\mathbb{R}^n$

Elian Masnada[*]

25 novembre 2020

[*] **J'encourage les élèves à me faire part de leurs remarques par email à l'adresse elian.masnada@cyu.fr afin de m'aider à améliorer ce corrigé.**

TD1[1] : Normes, distances et boules

Exercice 1 : Normes de $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|)$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

   Indication : pour $\|\cdot\|_2$, on utilisera l'inégalité de Schwarz admise ici

   $$|\langle u|v\rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$$

   où $\langle u|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ avec $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$.

2. Démontrer que pour $\forall a, b \geq 0$: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
3. Généralisation : montrer que

   $$\forall a_1, ..., a_n \geq 0, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$$

4. En déduire que pour $\forall x,\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
5. Démontrer que

   $$\forall x,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

6. Les 3 normes sont-elles équivalentes ?
7. Représenter, pour $\mathbb{R}^2$, la boule fermée unité $\overline{B}\Big(a = (0,0), r = 1\Big)$ pour chacune de ces normes.

1. Petite précision car il est toujours important de rendre à César ce qui est à César : tout au long du document, lorsque la correction est en rouge vif alors elle a été rédigé par mes soins, lorsque la correction est en bordeaux alors il s'agit d'une correction rédigée par les soins de M. Masereel (c'est le cas pour 5 exercices ou parties d'exercice).

Réponses :

1. Démontrons que ces trois applications sont bien des normes. Pour cela il faut montrer que chacune de ces applications vérifie les 3 propriétés suivantes

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   Pour la norme $\|\cdot\|_1$:

   (a) Si $\|x\|_1 = 0$ alors $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Longrightarrow \forall i,\ x_i = 0$
   finalement $\|x\|_1 = 0 \Longrightarrow x = (0, 0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.
   finalement :
   $\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \ |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \, \|x\|_1$

   (c) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Alors $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
   $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|$. Or $\forall i$, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$. Ainsi
   $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

   Pour la norme $\|\cdot\|_2$:

   (a) Si $\|x\|_2 = 0$ alors $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0 \Longrightarrow \forall i,\ x_i = 0$
   finalement $\|x\|_2 = 0 \Longrightarrow x = (0, 0, ..., 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.
   finalement :
   $\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \, \|x\|_2$

   (c) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   Alors $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. On a alors :

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + x_i y_i)$$

Or d'après l'énoncé, nous avons l'indication : $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$
Ainsi :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$. Or puisque $\|\cdot\|_2$ est clairement une application définie positive, on peut prendre la racine carrée de l'inégalité précédente sans changer le sens de l'inégalité. Ainsi

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:

(a) Si $\|x\|_\infty = 0$ alors $\max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) = 0 \Longrightarrow \forall i,\ x_i = 0$
finalement $\|x\|_\infty = 0 \Longrightarrow x = (0,0,...,0) = 0_{\mathbb{R}^n}$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.
finalement :
$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}(|\lambda x_i|) = |\lambda| \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) = |\lambda|\,\|x\|_\infty$

(c) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. On a alors :

$\forall i,\ |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) + \max_{1\leq i\leq n}(|y_i|)$

Comme c'est vrai pour tout i, c'est notamment vrai pour la valeur de i tel que $|x_i + y_i|$ soit maximal. Ainsi

$\max_{1\leq i\leq n}(|x_i + y_i|) \leq \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) + \max_{1\leq i\leq n}(|y_i|)$

et finalement $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Donc les 3 applications sont bien des normes.

2. Montrons que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$:

Puisque $2\sqrt{ab} \geq 0$, on a évidemment

$$0 \leq a+b \leq a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

On peut alors prendre la racine carrée de l'expression précédente pour ainsi obtenir le résultat demandé.

3. généralisons maintenant l'expression précédente. Pour cela, on remarque que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i + 2\sum_{i<j}^{n} \sqrt{a_i a_j} = (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i})^2$$

on prend alors la racine carrée pour obtenir le résultat demandé, à savoir

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$$

4. Démontrons que $\forall x,\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1$:

On veut donc démontrer

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

or, $\forall i,\ |x_i| = \sqrt{x_i^2}$. On a donc d'après la question précédente (en posant $a_i = x_i^2$)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

CQFD

5. On veut démontrer que $\forall x,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$

On a déjà démontré l'inégalité intérieure à la question précédente.

<u>Commençons par montrer que</u> $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$, c'est-à-dire que : $\max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Or ceci est trivial car $\|x\|_\infty^2 = \left(\max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)\right)^2$ et donc

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_\infty^2 + \alpha$$

où α est positif. Donc finalement, $\forall x,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

<u>Montrons maintenant que</u> $\|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$:

c'est encore une fois trivial. En effet : $\forall i,\ |x_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$, ce qui implique que

$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$, et finalement $\|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$

On a bien $\forall x,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$

6. On nous demande maintenant si les 3 normes sont équivalentes. Il y a 2 façons de répondre à cela
   (a) La façon la plus simple de répondre est de voir que comme on a ici des normes définies sur un espace de dimension finie (dimension n) alors les normes sont équivalentes.
   (b) Mais on peut aussi utiliser la réponse à la question 5. En effet, de cette question, on déduit que les normes 2 et ∞ sont équivalentes et que les normes 1 et ∞ sont équivalentes. Donc par transitivité les normes 2 et 1 sont équivalentes.
7. Ces boules ont été faites en cours. Du coup, cela peut être fait en autonomie par les élèves.

Exercice 2 : Norme sur $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit $a_1,\ a_2, ...,\ a_n \in \mathbb{R}$. Soit N une application de $E \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ N(x) = a_1|x_1| + a_2|x_2| + ... + a_n|x_n|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Réponses : Il faut montrer sous quelles conditions N vérifie les 3 propriétés suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

1. Imaginons qu'il existe j tel que $a_j = 0$. Pour fixer les idées, disons que $j = 2$. Alors tout vecteur de la forme $X = (0, x_2, 0, ..., 0)$ (avec $x_2 \in \mathbb{R}$) conduit à $N(X) = 0$, ce qui contredit la première propriété. On voit donc qu'il faut que $\forall i$, $a_i \neq 0$.

   Mais il faut de plus que tous les a_i soit strictement positif. En effet, il faut qu'ils soient de même signe pour assurer que $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$ et positif de façon à ce que l'application soit définie positive.

   Ainsi, la première propriété implique que
   $$\forall i, a_i > 0$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors
   $N(\lambda x) = a_1|\lambda x_1| + ... + a_n|\lambda x_n| = |\lambda|(a_1|x_1| + ... + a_n|\lambda x_n|) = |\lambda| N(x)$
3. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

   $N(x+y) = a_1|x_1 + y_1| + ... + a_n|x_n + y_n| \leq a_1|x_1| + a_1|y_1| + ... + a_n|x_n| + a_n|y_n|$
   $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Finalement N est une norme ssi
$$\forall i, a_i > 0$$

Exercice 3 : Norme sur l'espace des matrices carrées

Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $\forall a$, on définit les deux applications

$$N_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longrightarrow N_1(a) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

et

$$\begin{aligned} N_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow N_2(a) = \sqrt{Tr(^t aa)} \end{aligned}$$

1. Montrer que ces deux applications sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Réponses :

1. Il va falloir montrer que N_1 et N_2 vérifient bien les 3 conditions suivantes
   (a) $\forall a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(a) = 0 \Longrightarrow x = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
   (b) $\forall a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda a) = |\lambda| N(a)$
   (c) $\forall a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(a+b) \leq N(a) + N(b)$

   Pour N_1 :

   (a) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $N_1(a) = 0$. Alors $\max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = 0$ ce qui implique que $\forall i, j$ $a_{ij} = 0$ et finalement $a = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ qui est la matrice nulle.
   (b) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout i, j, $a_{ij} \longrightarrow \lambda a_{ij}$. Ainsi $N_1(\lambda a) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda a_{ij}| \right) = |\lambda| \max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = |\lambda| N_1(a)$
   (c) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall i, j$:

   $$|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$$

   En sommant sur toute la ligne

   $$\sum_{j=1}^n |a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) + \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right) = N_1(a) + N_1(b)$$

   On peut maintenant prendre le max de l'ensemble de l'expression précédente (ce qui ne change rien à droite puisque le max du max est égal au max). On obtient alors $N_1(a+b) \leq N_1(a) + N_1(b)$.

Pour N_2 :
Il faut tout d'abord trouver l'expression de cette application. Pour rappel :

$$(ba)_{ij} = \sum_{k}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Or si $b = {}^t a$, on a $b_{ik} = a_{ki}$, ce qui implique

$$({}^t aa)_{ij} = \sum_{k}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

Et finalement

$$Tr({}^t aa) = \sum_{i}^{n} \left(\sum_{k}^{n} a_{ki} a_{ki} \right) = \sum_{i,k}^{n} a_{ki}^2$$

Donc

$$\forall a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N_2(a) = \sqrt{\sum_{i,k}^{n} a_{ki}^2}$$

(a) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $N_2(a) = 0$. Alors $\sqrt{\sum_{i,k}^{n} a_{ki}^2} = 0$ ce qui implique que $\forall i,j\ a_{ij} = 0$ et finalement $a = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ qui est la matrice nulle.

(b) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout i, j, $a_{ij} \longrightarrow \lambda a_{ij}$. Ainsi $N_2(\lambda a) = \sqrt{\sum_{i,k} (\lambda a_{ki})^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i,k} (a_{ki})^2} = |\lambda| N_2(a)$

(c) Soit $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\forall i, j$:

$$(a_{ij} + b_{ij})^2 \leq a_{ij}^2 + b_{ij}^2 + 2|a_{ij} b_{ij}|$$

Or pour $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. Ainsi, en posant $\alpha = |a_{ij}|/N_2(a)$ et $\beta = |b_{ij}|/N_2(b)$, on a

$$\frac{|a_{ij} b_{ij}|}{N_2(a) N_2(b)} \leq \frac{1}{2} \Big[\left(\frac{|a_{ij}|}{N_2(a)} \right)^2 + \left(\frac{|b_{ij}|}{N_2(b)} \right)^2 \Big]$$

En effectuant une somme sur tous les éléments, on obtient

$$\sum_{i,j} \frac{|a_{ij}b_{ij}|}{N_2(a)N_2(b)} \leq \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big[\left(\frac{|a_{ij}|}{N_2(a)}\right)^2 + \left(\frac{|b_{ij}|}{N_2(b)}\right)^2\Big]$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N_2(a)}\sum_{i,j}|a_{ij}|^2 + \frac{1}{N_2(b)}\sum_{i,j}|b_{ij}|^2\right) = 1$$

Ainsi

$$\sum_{i,j}|a_{ij}b_{ij}| \leq N_2(a)N_2(b)$$

Revenons maintenant à l'inégalité triangulaire :

$$N_2^2(a+b) = \sum_{i,j}(a_{ij}+b_{ij})^2 \leq \sum_{i,j}|a_{ij}|^2 + \sum_{i,j}|b_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j}|a_{ij}b_{ij}|$$
$$\leq N_2^2(a) + N_2^2(b) + 2N_2(a)N_2(b) = (N_2(a)+N_2(b))^2$$

Comme l'application N_2 est définie positive, on peut prendre la racine carrée de cette expression, conduisant ainsi à l'inégalité triangulaire

$$N_2(a+b) \leq N_2(a) + N_2(b)$$

2. Puisque l'espace est de dimension finie et que N_1 et N_2 sont des normes alors ces normes sont équivalentes.

Exercice 4 : Norme sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit les applications suivantes $\forall f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|)$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes (on admettra que $\|\cdot\|_2$ est bien une norme).
2. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?
3. Déduire que E n'est pas un espace de dimension finie.

Réponses :

1. On doit vérifier que ces 3 applications vérifient
   (a) $\forall f \in E$, $\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$
   (b) $\forall f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$
   (c) $\forall f \in E$ et $\forall g \in E$, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

   Pour $\|\cdot\|_1$

   (a) Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = 0$ ce qui implique évidemment $f = 0$
   (b) Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)| dx = |\lambda| \, \|f\|_1$
   (c) Soit $f, g \in E$,
   $$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$
   puisque $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

   Pour $\|\cdot\|_\infty$

   (a) Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|)$ ce qui implique évidemment $f = 0$
   (b) Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} (|\lambda f(x)|) = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) = |\lambda| \, \|f\|_\infty$
   (c) Soit $f, g \in E$, alors pour tout $x \in [0,1]$
   $$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$
   or évidemment pour tout $x \in [0,1]$
   $$\begin{cases} |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \\ |g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|g(x)|) \end{cases}$$
   Donc : $\forall x \in [0,1]$
   $$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|) + \sup_{x\in[0,1]} (|g(x)|)$$

Il ne reste plus qu'à passer au sup :

$$\sup_{x\in[0,1]}(|f(x)+g(x)|) \leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|) + \sup_{x\in[0,1]}(|g(x)|)$$

conduisant à l'inégalité triangulaire voulue.

2. On cherche à savoir si ces 3 normes sont équivalentes. Par exemple, pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, cela revient à dire qu'il existe 4 réels strictement positifs a, b, c et d tels que pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, on ai

$$\begin{cases} a\,\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq b\,\|f\|_1 \\ c\,\|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq d\,\|f\|_2 \end{cases}$$

Pour qu'il n'y ai pas équivalence, il suffit que l'on trouve une famille de fonction f telle que a, b, c ou d tendent vers 0 ou l'infini. Il suffit donc d'étudier le rapport $\|f\|_1 / \|f\|_2$ ou $\|f\|_2 / \|f\|_1$ tendent vers 0 ou l'infini. Ici, nous allons définir la famille de fonctions

$$f_n \ : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^n \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \\ \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ \|f_n\|_\infty = 1 \end{cases}$$

Conduisant donc, lorsque n tend vers l'infini, à

$$\begin{cases} \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \longrightarrow \infty \\ \\ \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \longrightarrow \infty \\ \\ \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Les normes ne sont donc pas équivalentes

3. Comme les normes ne sont pas équivalentes, l'espace est de dimension infinie.

Exercice 5 : Norme sur $\mathbb{R}^2$

Soient $a, b > 0$. On pose pour $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(X) = N(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

1. Montrer que $N(x, y) = N(X)$, avec $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, est une norme sur $\mathbb{R}^2$. *(utiliser l'inégalité de Schwarz donnée dans l'exercice 1 de ce TD)*
2. Dessiner la boule fermée unité $\overline{B}\Big(a = (0,0), r = 1\Big)$ *(cette question est à traiter si la notion de boule a déjà été définie en cours).*
3. Trouver le plus grand réel q et le plus petit réel p tels que

$$q \left\|\cdot\right\|_1 \leq N \leq p \left\|\cdot\right\|_2$$

Réponses :

1. Démontrons que cette application est bien une norme. Pour cela il faut montrer qu'elle vérifie les 3 propriétés suivantes
   (a) $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $N(X) = 0 \Longrightarrow X = (0,0)$
   (b) $\forall X \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(X) = |\lambda| N(X)$
   (c) $\forall X_1 \in \mathbb{R}^2$ et $\forall X_2 \in \mathbb{R}^2$, $N(X_1 + X_2) \leq N(X_1) + N(X_2)$

   Donc

   (a) Soit $N(X) = 0$, alors $\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = 0$ (où $X = (x, y)$). Or comme a et b sont strictement positifs, $x = y = 0$. Finalement $X = (0,0)$.
   (b) Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

   $$N(\lambda X) = \sqrt{a^2\lambda^2x^2 + b^2\lambda^2y^2} = |\lambda|\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = |\lambda| N(X)$$

   (c) Soit $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors $X_1 + X_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et donc

   $$\begin{aligned} N^2(X_1 + X_2) &= a^2(x_1 + x_2)^2 + b^2(y_1 + y_2)^2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + 2a^2x_1x_2 + b^2y_1^2 + b_2y_2^2 + 2b^2y_1y_2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b_2y_2^2 + 2\Big((ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)\Big) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant Cauchy-Schwarz sur $w_1 = (ax_1, by_1)$ et $w_2 = (ax_2, by_2)$. Alors

$$|(ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)| \leq \sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
N^2(X_1 + X_2) &\leq a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b_2y_2^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \\
&\leq \left(\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}\right)^2 \\
&\leq \Big(N(X_1) + N(X_2)\Big)^2
\end{aligned}$$

Or l'application N est définie positive permettant donc de prendre la racine carrée de l'expression précédente. Ainsi

$$N(X_1 + X_2) \leq N(X_1) + N(X_2)$$

2. La boule fermée unité est donné par $N(X) \leq 1$ avec $X = (x, y)$. On a donc
$$\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} \leq 1$$
En élevant au carré, on obtient que le contour de la boule est donné par $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ ce qui correspond à une ellipse de demi-axes $1/a$ et $1/b$.
3.

Exercice 6 : Norme sur l'espace des polynômes

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ (espace des polynômes de degré n). On définit

$$\begin{aligned}
\|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\
P &\longrightarrow \|P\| = \sup_{k \in [\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)|
\end{aligned}$$

où $P^{(k)}$ est la dérivée $k$ème de P, et

$$\begin{aligned}
N : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\
P &\longrightarrow N(P) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^n}
\end{aligned}$$

1. Montrer que N est bien définie.
2. Montrer que ces deux applications sont des normes.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall P \in E, \|P\| \leq CN(p)$$

Réponses :

1. Commençons par vérifier que l'application $N(P) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1+|x|^n}$ est bien définie. Clairement pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + |x|^n \neq 0$. Le problème se trouve donc éventuellement en $\pm\infty$. Pour investiguer cela, notons $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors

$$\frac{P(x)}{1+|x|^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{1+|x|^n} = a_n \frac{x^n}{1+|x|^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^k}{1+|x|^n}$$

La somme tend clairement vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$ et le premier tend vers a_n. Il s'ensuit que $N(P)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Nous devons maintenant montrer que ces applications sont des normes.

Pour $\|\cdot\|$:

(a) Soit $\|P_n\| = 0$ alors $\sup_{k\in[\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)| = 0$. Notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ce polynome. Alors $P_n^{(k)} = k! a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi, $\sup_{k\in[\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)| = 0$ implique $\forall k$, $a_k = 0$ et donc $P_n = 0$.

(b) Soit λ un réel et P_n un polynome. Alors $\lambda P_n^{(k)} = \lambda k! a_k$. Finalement
$\|\lambda P_n\| = \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |\lambda P^{(k)}(0)| = \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |\lambda k! a_k| = |\lambda| \, \|P_n\|$

(c) Soit P_n et Q_n deux polynômes de degré n. Alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ |(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

or

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ |P^{(k)}(0)| \leq \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)|$$
$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ |Q^{(k)}(0)| \leq \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |Q^{(k)}(0)|$$

finalement

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ |(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)|+|Q^{(k)}(0)| \leq \sup_{k\in[\![0,n]\!]} |P^{(k)}(0)|+\sup_{k\in[\![0,n]\!]} |Q^{(k)}(0)|$$

et en prenant le sup de cette expression, on retrouve bien l'inégalité triangulaire.

Pour N :

(a) trivial

(b) trivial

(c) La démonstration est très exactement de même nature que pour la norme précédente. Ainsi, pour $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{|(P+Q)(x)|}{1+|x|^n} \leq \frac{|P(x)|}{1+|x|^n} + \frac{|Q(x)|}{1+|x|^n}$$

or

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{|P(x)|}{1+|x|^n} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1+|x|^n}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{|Q(x)|}{1+|x|^n} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|Q(x)|}{1+|x|^n}$$

finalement

$$\frac{|(P+Q)(x)|}{1+|x|^n} \leq \frac{|P(x)|}{1+|x|^n} + \frac{|Q(x)|}{1+|x|^n} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|P(x)|}{1+|x|^n} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|Q(x)|}{1+|x|^n}$$

en prenant le sup de cette expression, alors on retombe sur l'inégalité triangulaire.

3. L'espace est de dimension finie. Les deux normes sont donc équivalentes. Ainsi, il existe a et b deux réels strictement positifs tels que

$$\forall P,\ aN(p) \leq \|P\| \leq bN(p)$$

Il suffit alors de poser $C = b$. CQFD

Exercice 7 : "3ème inégalité triangulaire"

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour $\forall x, y \in E$, on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$$

Réponses :

$$\begin{aligned}
&(1)\ \|x + y + x - y\| = \|2x\| = 2\|x\| \leq \|x + y\| + \|x - y\| \\
&(2)\ \|y + x + y - x\| = \|2y\| = 2\|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de faire (1)+(2)

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x - y\| + \|x + y\|$$

Exercice 8 : Autre norme

Soit l'application N de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $N(x, y) = 4|x| + |y|$.

1. N est-elle une norme ?
2. Dessiner la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Quelles sont ses symétries ?
3. En toute généralité quelle est la symétrie d'une boule fermée.

Réponses : A rédiger plus tard car l'exercice est vraiment trivial.

Exercice 9 : A propos des distances

Dans cet exercice on définit des applications d_i de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans la suite $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
d_1 :\ & (x, y) \longrightarrow d_1(x, y) = (x - y)^2 \\
d_2 :\ & (x, y) \longrightarrow d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \\
d_3 :\ & (x, y) \longrightarrow d_3(x, y) = |x^2 - y^2| \\
d_4 :\ & (x, y) \longrightarrow d_4(x, y) = |x - 2y| \\
d_5 :\ & (x, y) \longrightarrow d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \\
d_6 :\ & (x, y) \longrightarrow d_6(x, y) = |x^3 - y^3|
\end{aligned}$$

Ces applications sont-elles des distances ? Sont-elles associées à des normes ?

Réponses :

Rappel 1 :
Pour savoir si une application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ est une distance, il faut que d vérifie les 3 propriétés suivantes

1. $\forall (X,Y) \in E^2,\ d(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X = Y$
2. $\forall (X,Y) \in E^2,\ d(X,Y) = d(Y,X)$
3. $\forall (X,Y,Z) \in E^3,\ d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

Dans notre cas, $E = \mathbb{R}$.

Rappel 2 :
On rappelle également que si une distance d sur E^2 est associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E, alors

1. $\forall (X,Y) \in E^2$, $d(X,Y) = \|X - Y\|$
2. Si d est associée à une norme alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall (X,Y) \in E^2$, $d(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d(X,Y)$
3. Si d est associée à une norme alors $d(X,0)$ doit vérifier les propriétés d'une norme.

1. On considère $d_1 = (x-y)^2$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $x = y$ alors $d_1(x,x) = (x-x)^2 = 0$
   Si $d_1(x,y) = 0$ alors $(x-y)^2 = 0$ ce qui implique $x = y$.
   (b) Vérifions la symétrie.
   $d_1(x,y) = (x-y)^2 = ((-1)(y-x))^2 = (y-x)^2 = d_1(y,x)$
   (c) soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors
   $(x-y)^2 = (x-z+z-y)^2 = (x-z)^2 + (z-y)^2 + 2(x-z)(z-y)$
   or si l'inégalité triangulaire est vraie, on devrait également avoir
   $(x-y)^2 \leq (x-z)^2 + (z-y)^2$
   Il suffit donc de montrer qu'il existe x, y, z tels que $2(x-z)(z-y) > 0$ pour montrer que l'inégalité n'est pas vérifier. Prenons $x = 3$, $z = 2$ et $y = 1$, conduisant à $2(x-z)(z-y) = 1$

   donc d_1 n'est pas une distance puisqu'elle ne vérifie pas la dernière propriété.

2. On considère $d_2 = \sqrt{|x-y|}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Si $x = y$ alors $d_2(x,x) = \sqrt{|x-x|} = 0$
   Si $d_2(x,y) = 0$ alors $\sqrt{|x-y|} = 0$ ce qui implique $x = y$.
   (b) Vérifions la symétrie.
   $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d_2(y,x)$
   (c) soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a évidemment

   $$|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

   Prenons la racine carrée de cette expression (ce qui n'affecte pas le signe de l'inégalité)

   $$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |y-z|}$$

   or pour tout a, b réels positifs, on a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (car $a+b \leq a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ et il ne reste plus qu'à prendre la racine carrée de cette expression). Ainsi

   $$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |y-z|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|y-z|}$$

   qui est bien l'inégalité triangulaire.

   donc d_2 est bien une distance. Vérifions si elle dérive ou non d'une norme. Pour cela, on va vérifier si $d_2(x,0) = \sqrt{|x|}$ a ou non les propriétés d'une norme.

   Evidemment si $d_2(x,0) = \sqrt{|x|} = 0$ alors $x = 0$ donc la première propriété est vérifiée.
   Soit λ et x deux réels quelconques. Alors $d_2(\lambda x, 0) = \sqrt{|\lambda x|} = \sqrt{|\lambda|}\sqrt{|x|}$ qui ne vérifie pas la deuxième propriété. Donc d_2 n'est pas associée à une norme.

3. Soit $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$. Si $d_3(x,y) = 0$ alors $|x^2 - y^2| = 0$ donc $x^2 = y^2$. Ainsi, $x = 1$ et $y = -1$ conduisent à $d_3(x,y) = 0$ alors que $x \neq y$. Donc d_3 n'est pas une distance.

4. Soit $d_4(x,y) = |x - 2y|$. Donc pour tout couple (x,y) tel que $x = 2y$ $d_4(x,y) = 0$ alors que $x \neq y$. Donc d_4 n'est pas une distance.

5. Soit $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

(a) Si $x = y$ alors $d_5(x,x) = \frac{|x-x|}{1+|x-x|} = 0$
Si $d_5(x,y) = 0$ alors $|x-y| = 0$ ce qui implique $x = y$.

(b) Clairement, grâce à la valeur absolue, d_5 est symétrique : $d_5(x,y) = d_5(y,x)$.

(c) Montrons tout d'abord que pour tout a, b, c réels strictement positifs, on a

$$a \leq b + c \Longrightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

Pour cela, calculons explicitement

$$-\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = \frac{2bc + abc + b + c - a}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \frac{b + c + a + bc(a+2)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 0$$

Or, on a

$$|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

on peut alors utiliser l'expression démontrée précédemment (où $a = |x-y|$, $b = |x-z|$ et $c = |y-z|$)

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|}$$

où on reconnait donc $d_5(x,y) \leq d_5(x,z) + d_5(y,z)$.

Encore une fois, cette distance n'est pas issue d'une norme car $d_5(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| d_5(x,y)$ ou encore parce que $d_5(\lambda x, 0) \neq |\lambda| d_5(x,0)$.

6. Laissée en exercice. C'est bien une distance mais elle n'est pas issue d'une norme.

TD2 : Ouverts et fermés

Exercice 1 : Normes équivalentes et notions d'ouvert et fermé

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

1. Soit $B_{\|\cdot\|_1}(a,r) = \{x \in E / \|x-a\|_1 < r\}$. Montrer qu'il existe r' tel que
$$B_{\|\cdot\|_1}(a,r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(a,r')$$
où $B_{\|\cdot\|_2}(a,r') = \{x \in E / \|x-a\|_2 < r'\}$.

2. Soit $B_{\|\cdot\|_2}(a,r'') = \{x \in E / \|x-a\|_2 < r''\}$. Montrer qu'il existe r''' tel que
$$B_{\|\cdot\|_2}(a,r'') \subset B_{\|\cdot\|_1}(a,r''')$$
où $B_{\|\cdot\|_1}(a,r''') = \{x \in E / \|x-a\|_1 < r'''\}$.

3. En déduire qu'un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$ et réciproquement.

4. Même question pour les fermées.

Réponses :

1. Les deux normes étant équivalentes, nous savons qu'il existe α et β des réels strictement positifs tels que pour tout $(x,a) \in E^2$
$$\alpha \|x-a\|_1 \leq \|x-a\|_2 \leq \beta \|x-a\|_1$$
Alors
$$x_0 \in B_{\|\cdot\|_1}(a,r) \Longleftrightarrow \|x_0 - a\|_1 < r$$

Donc
$$\alpha \left\|x_0 - a\right\|_1 \leq \left\|x_0 - a\right\|_2 \leq \beta \left\|x_0 - a\right\|_1 < \beta r$$
Ainsi x_0 appartient à une boule ouverte de la norme 2 et de rayon βr
$$x_0 \in B_{\|\cdot\|_2}(a, \beta r)$$
Comme cela est vrai pour tout $x_0 \in B_{\|\cdot\|_1}(a, r)$, finalement, on déduit que
$$B_{\|\cdot\|_1}(a, r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(a, r') \quad \text{avec} \quad r' = \beta r$$

2. Il s'agit ici de faire le même raisonnement. Les deux normes étant équivalentes, nous savons qu'il existe α et β des réels strictement positifs (les mêmes qu'à la question précédente) tels que pour tout $(x, a) \in E^2$
$$\frac{1}{\beta} \left\|x - a\right\|_2 \leq \left\|x - a\right\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \left\|x - a\right\|_2$$
Alors
$$x_0 \in B_{\|\cdot\|_2}(a, r'') \Longleftrightarrow \left\|x_0 - a\right\|_2 < r''$$
Donc
$$\frac{1}{\beta} \left\|x_0 - a\right\|_2 \leq \left\|x_0 - a\right\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \left\|x_0 - a\right\|_2 < \frac{r''}{\alpha}$$
Ainsi x_0 appartient à une boule ouverte de la norme 1 et de rayon r''/α
$$x_0 \in B_{\|\cdot\|_1}(a, \frac{r''}{\alpha})$$
Comme cela est vrai pour tout $x_0 \in B_{\|\cdot\|_2}(a, r'')$, finalement, on déduit que
$$B_{\|\cdot\|_2}(a, r'') \subset B_{\|\cdot\|_1}(a, r''') \quad \text{avec} \quad r''' = \frac{r''}{\alpha}$$

3. Soit $A \subset E$ un sous ensemble. Alors
$$A \text{ ouvert selon } \left\|\cdot\right\|_1 \Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists R > 0 \ / \ B_{\|\cdot\|_1}(x, R) \subset A$$
Or compte-tenu de la question 2), nous savons que
$$B_{\|\cdot\|_2}(x, \alpha R) \subset B_{\|\cdot\|_1}(x, R) \subset A$$

(puisque $R = r''/\alpha$, $r'' = \alpha R$).

Donc A est un ouvert selon la norme $\|\cdot\|_2$.

À l'inverse :

$$A \text{ ouvert selon } \|\cdot\|_2 \Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists R > 0 \ / \ B_{\|\cdot\|_2}(x, R) \subset A$$

Or compte-tenu de la question 1), nous savons que

$$B_{\|\cdot\|_1}(x, \frac{R}{\beta}) \subset B_{\|\cdot\|_2}(x, R) \subset A$$

(puisque $R = \beta r$, $r = \frac{R}{\beta}$).

Donc A est un ouvert selon la norme $\|\cdot\|_1$.

4. Si F est un fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ alors $C_E F$ est un ouvert selon la norme $\|\cdot\|_1$. Or si $C_E F$ est un ouvert pour $\|\cdot\|_1$, d'après 3), $C_E F$ est aussi un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_2$ et finalement F est un fermé pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Conclusion de l'exercice : Les notions d'ouvert et de fermé ne dépendent pas de la norme choisie dans les espaces de dimension finie puisque toutes les normes y sont équivalentes.

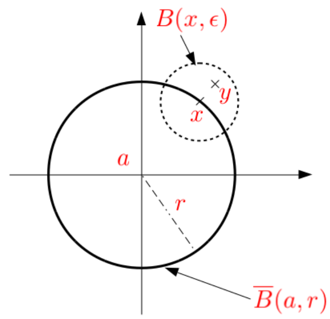
Exercice 2 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une boule fermée n'est pas un ouvert.
2. Montrer qu'une boule ouverte n'est pas un fermé.

Réponses :

1. Commençons par illustrer les choses dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ (voir figure ci-dessous)



On note $\overline{B}(a,r)$ la boule fermé de rayon r et de centre a. On considère un point x se trouvant sur le bord de cette boule et la boule ouverte $B(x,\epsilon)$, c'est-à-dire, la boule ouverte de centre x et de rayon $\epsilon > 0$. Le but va être de montrer en toute généralité, il y aura toujours un point y appartenant à $B(x,\epsilon)$ pour $\forall \epsilon > 0$ extérieur à $\overline{B}(a,r)$ conduisant donc au fait que $\overline{B}(a,r)$ n'est pas un ouvert. Pour cela le point y est choisi tel que les vecteurs $y-x$ et $x-a$ sont colinéaires, ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$y - x = \lambda(x - a)$$

De plus le point y est choisi à mi-chemin entre x et le bord de la boule $B(x,\epsilon)$. On a donc $\|y-x\| = \frac{\epsilon}{2}$, d'où l'on tire

$$\|y - x\| = \lambda \|x - a\| \Longrightarrow |\lambda| = \frac{\|y - x\|}{\|x - a\|} = \frac{\epsilon}{2r}$$

Donc

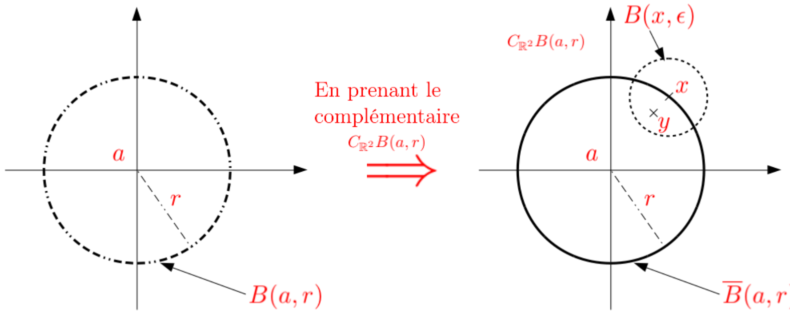
$$y = x + \frac{\epsilon}{2r}(x - a) \Longleftrightarrow y - a = \left(1 + \frac{\epsilon}{2r}\right)(x - a)$$

On peut maintenant prendre la norme de cette expression

$$\|y - a\| = \left(1 + \frac{\epsilon}{2r}\right)\|x - a\|$$

or $\epsilon > 0$ donc $\|y-a\| > \|x-a\|$. Finalement $y \notin \overline{B}(a,r)$ pour tout ϵ et donc aucune boule ouverte centrée en x n'est entièrement contenu dans $\overline{B}(a,r)$ qui n'est donc pas un ouvert.

2. On se demande maintenant si une boule ouverte est un fermé. Notons $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r de l'ensemble E. Pour déterminer si $B(a,r)$ est un fermé, il suffit d'étudier le complémentaire $C_E B(a,r)$. Si $C_E B(a,r)$ est un ouvert alors $B(a,r)$ est un fermé sinon, ce n'est pas un fermé. Illustrons cela dans $\mathbb{R}^2$.



On va démontrer que le point y est toujours extérieur à $C_E B(a,r)$. Pour cela le point y est choisi tel que les vecteurs $y-x$ et $x-a$ sont colinéaires, ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$y - x = \lambda(x - a)$$

De plus y est choisi à mi-chemin entre x est le bord de $B(x,\epsilon)$. On a donc $\|y-x\| = \frac{\epsilon}{2}$, d'où l'on tire

$$\|y - x\| = \lambda \|x - a\| \Longrightarrow |\lambda| = \frac{\|y - x\|}{\|x - a\|} = \frac{\epsilon}{2r}$$

Donc

$$y = x - \frac{\epsilon}{2r}(x - a) \Longleftrightarrow y - a = \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)(x - a)$$

On peut maintenant prendre la norme de cette expression

$$\|y - a\| = \left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)\|x - a\|$$

or $\epsilon > 0$ donc $\|y - a\| < r$. Finalement $y \notin C_E B(a,r)$ pour tout ϵ et donc aucune boule ouverte centrée en x n'est entièrement contenu dans $C_E B(a,r)$ qui n'est donc pas un ouvert. Donc $B(a,r)$ n'est pas fermé.

Exercice 3 :

Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts, des fermés, les deux ou aucun des deux.

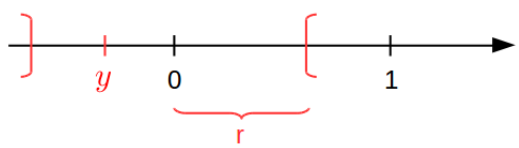
1. $A = [0, 1[$
2. $C = [0, +\infty[$

3. $D =]0,1[\cup \{2\}$
4. $E = \mathbb{N}$
5. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 4\}$
6. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 2\}$
7. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < |x-1| < 1\}$
8. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
9. $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$

Réponses :

1. On considère $A = [0,1[$.

   Ouvert ?
   Il semble y avoir un problème en 0. Prenons la norme $|\cdot|$ (de toute façon, nous avons vu que le choix de la norme n'impacte pas la notion d'ouvert en dimension finie) et considérons la boule ouverte centrée en 0 et de rayon quelconque $r > 0$: $B(0,r) =]-r, r[$

   Prenons $y = -r/2$. Alors $\|y - 0\| = |y - 0| = r/2 < r$, donc $y \in B(0,r)$. Mais $\forall r > 0$, $y \notin A$. Donc, $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A$ et finalement A n'est pas un ouvert.

   Fermé ?
   A est un fermé, si son complémentaire $C_{\mathbb{R}}A =]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$ est un ouvert.On voit qu'il y a un problème potentiel en 1. Pour cela, on considère la boule ouverte centrée en 1 et de rayon quelconque $r > 0$: $B(0,r) =]1-r, 1+r[$. Prenons $y = 1 - r/2$. Alors $\|y - 1\| = |y - 1| = r/2 < r$, donc $y \in B(1,r)$. Mais pour $r \underset{r>0}{\longrightarrow} 0$, $y \notin C_{\mathbb{R}}A$. Donc, $B(0,r) \not\subset C_{\mathbb{R}}A$ et finalement A n'est pas un fermé.

2. Soit $C = [0, \infty[$

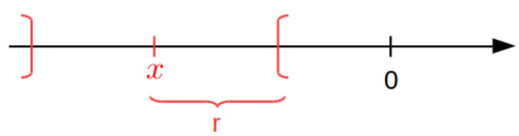
Ouvert ?
Le problème ne peut-être qu'en 0. C'est très exactement la même démonstration que pour A. Considérons la boule ouverte centrée en 0 et de rayon quelconque $r > 0$: $B(0, r) =]-r, r[$. Prenons $y = -r/2$. Alors $\|y - 0\| = |y - 0| = r/2 < r$, donc $y \in B(0, r)$. Mais $\forall r > 0$, $y \notin C$. Donc, $\forall r > 0$, $B(0, r) \not\subset C$ et finalement C n'est pas un ouvert.

Fermé ?
Si $C_{\mathbb{R}}C =]-\infty, 0[$ est un ouvert alors C est un fermé, sinon, ce n'est pas un fermé. Il y a plusieurs façons de traiter cela

(a) Faire appel au cours : dans le cours, nous avons vu qu'un ensemble de la forme $]-\infty, a[$, avec a un réel, est un ouvert. Donc C est un fermé.

(b) Utiliser une union infini d'ouverts : on sait en effet qu'une union infinie d'ouvert est un ouvert. De plus, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $]a, b[$ est un ouvert. Or $C_{\mathbb{R}}C = \cup_{a<0}]a, 0[$. Donc $C_{\mathbb{R}}C$ est un ouvert et C un fermé.

(c) Démonstration brutale : le problème ne peut être qu'en 0.



On introduit la boule $B(x, r = |x|/2) = B(x, -x/2) =]\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}x[$. Pour $\forall x \in C_{\mathbb{R}}C$; $r = |x|/2 > 0$ et $B(x, r) \subset C_{\mathbb{R}}C$ puisque, $\forall y \in B(x, r)$, $y < \frac{1}{2}x \in C_{\mathbb{R}}C$. Donc $C_{\mathbb{R}}C$ est un ouvert ce qui implique que C est un fermé.

3. $D =]0, 1[\cup \{2\}$

Ouvert ?
Clairement il y a un problème en 2. Prenons par exemple la boule $B(2, r) =]2 - r, 2 + r[$ avec $r > 0$. Alors le point $y = 2 + \frac{r}{2}$, qui appartient à $B(2, r)$ n'appartient pas à D quelque soit $r > 0$. Donc D n'est pas un ouvert.

Fermé ?
Si $C_{\mathbb{R}}D =]-\infty, 0] \cup [1, 2[\cup]2, \infty[$ est un ouvert alors D est un fermé. En

0, il y a clairement un problème. Pour cela, il suffit de prendre la boule ouverte $B(0,r) =]-r,r[$ avec $r > 0$. Considérons le point $y = r/2$ qui appartient clairement à $B(0,r)$. Or, pour $r \underset{r>0}{\longrightarrow} 0$, $y \notin C_{\mathbb{R}}D$, donc $B(0,r) \not\subset C_{\mathbb{R}}D$ donc D n'est pas un ouvert. Finalement D n'est pas un fermé.

4. $E = \mathbb{N}$

   Ouvert ?
   $E = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup ....$ Nous avons déjà vu qu'un singleton n'est pas un ouvert. Donc E n'est pas un ouvert.

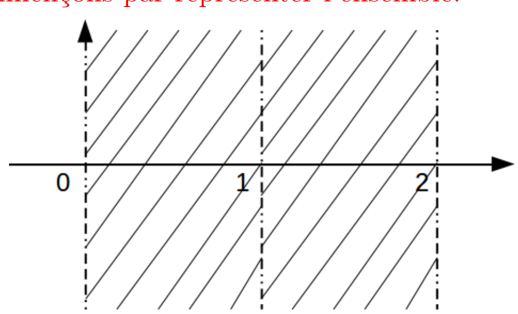
   Fermé ?
   $C_{\mathbb{R}} =]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3[...$, qui est une union infinie d'ouverts donc un ouvert. Finalement $\mathbb{N}$ est un fermé.

5. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 < 4\}$. On reconnait ici $B_{\|\cdot\|_2}(0,2)$ qui est une boule ouverte. Or nous avons vu qu'une boule ouverte est un ouvert et pas un fermé.

6. Soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 2\}$. On reconnait ici $\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,\sqrt{2})$ qui est une boule fermée. Or nous avons vu qu'une boule fermée est un fermé et pas un ouvert.

7. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x-1| < 1\}$.

   Ouvert ? Commençons par représenter l'ensemble.



   Il y a alors plusieurs façons de résoudre ce problème

   (a) Compte tenu des symétries et des invariances (l'ensemble est invariant par translation selon y), on peut étudier ce problème dans

$\mathbb{R}$. Ainsi, si $]0,1[\cup]1,2[$ est un ouvert alors H est un ouvert. Or c'est bien un ouvert comme une union de deux ouverts. Donc H est un ouvert.

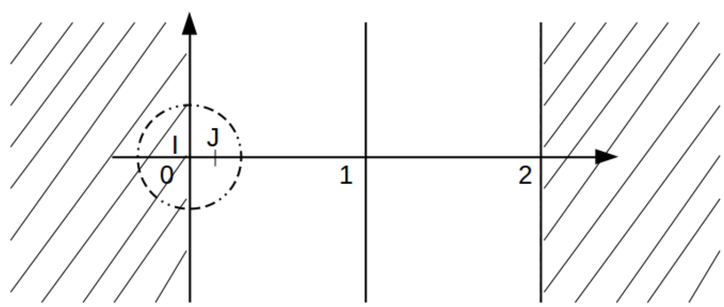
(b) On peut également utiliser un pavage de cet ensemble par les boules ouvertes de la norme infinie. En effet, rappelez vous que $B_\infty(0,r)$ est un carré de côté $2r$ et centré en 0. Ainsi, on peut montrer que

$$H = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\Big(B_\infty(a = (\frac{1}{2}, \frac{n}{2}), \frac{1}{2}) \cup B_\infty(a = (\frac{3}{2}, \frac{n}{2}), \frac{1}{2})\Big)$$

Or une union infinie d'ouverts est un ouvert donc H est un ouvert.

Fermé ?

On représente ci-dessous $C_{\mathbb{R}^2}H$



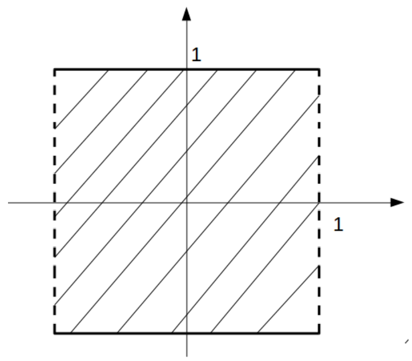
Il y a encore plusieurs façons de résoudre ce problème

(a) Compte tenu des symétries et des invariances (l'ensemble est invariant par translation selon y), on peut étudier ce problème dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $]-\infty,0]\cup[2,\infty[$ est un ouvert alors H est un fermé. Toutefois, nous savons que $]-\infty,0]\cup[2,\infty[$ n'est pas un ouvert à cause de 0 et 2 (même démonstration que ce qui a été fait pour les premiers ensembles).

(b) On peut également faire la démonstration directement. Prenons le point $I = (0,0)$ et regardons si $\exists r > 0 \ / \ B_2(I,r) \subset C_{\mathbb{R}^2}H$. Prenons $J = (\frac{r/2}{,}0)$. Comme $\|J - I\|_2 = \frac{r}{2} < r$, $y \in B_2(I,r)$. Alors pour $r \underset{r>0}{\longrightarrow} 0$, $J \notin C_{\mathbb{R}^2}H$. Finalement $C_{\mathbb{R}^2}H$ n'est pas un ouvert donc H n'est un fermé.

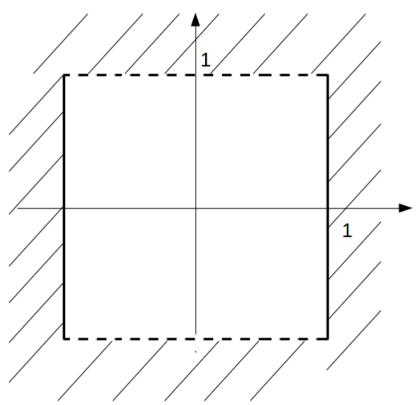
8. $I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\right\}$.

Ouvert ? Commençons par représenter l'ensemble.



Considérons le point $i = (0,1) \in I$. Considérons la boule $B_2(i,r)$ avec $r > 0$. Alors $y = (0, 1 + \frac{r}{2}) \in B_2(i,r)$. Or pour $r \underset{r>0}{\longrightarrow} 0$, $y \notin I$ donc I n'est pas un ouvert.

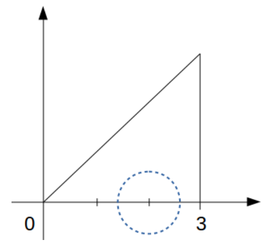
Fermé ?
On représente ci-dessous le complémentaire de I



Même principe de démonstration en utilisant par exemple le point $i = (-1,0)$.

9. $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$

Ouvert ?
Ci-dessous est représenté l'ensemble J.



On considère le point $I = (2, 0)$. Prenons $B_2(I, r)$. $\forall r > 0$ et $I' = (2, -r/2)$, $I' \in B_2(I, r)$. Or $\forall r > 0$, $I' \notin J$. Donc J n'est pas un ouvert.

Fermé ?
C'est bien un fermé.

Exercice 4 : Ensemble ouvert et majoré

Soit A un ouvert majoré de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Montrer que A ne contient pas son majorant.

Réponse :
Méthode 1 : (pour les moins matheux)
Soit E un ensemble majoré alors, $\exists M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq M$. On dit que M est le majorant de E. Ici, $A \subset \mathbb{R}$. Donc il existe M tel que pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M \iff x \in [-M, M]$. Or A est un ouvert de $\mathbb{R}$ et est donc de la forme $A =]\alpha, \beta[$, avec α et β deux réels. Il faut donc que A s'écrive $A =]-M, M[$ et donc A ne contient pas sa borne supérieure M.

Méthode 2 :
Soit M la borne supérieure de A. Si $M \in A$, alors en tant qu'ouvert, A est un voisinage de M. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(M, \alpha) \subset A$, c'est-à-dire $]M - \alpha; M + \alpha[\subset A$. Ce qui implique que $M + \alpha \subset A$. Or M était censé être la borne supérieure de A, d'où une contradiction. Donc A ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice 5 : Somme d'ensembles

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On introduit l'ensemble

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists (a, b) \in A \times B, \ x = a + b\}$$

1. Montrer que si A ou B est ouvert alors $A+B$ est ouvert.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Réponses :

1. Supposons A un ouvert (et B quelconque). Soit $x = a + b \in A + B$. Puisque A est un ouvert, il est un voisinage de a. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a - \epsilon, a + \epsilon[\subset A$. Soit $y \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Nous avons $a+b-\epsilon = x-\epsilon \leq y \leq x+\epsilon = a+b+\epsilon$. D'où $y - b \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset A$. D'où en posant $a' = y - b \in A$, nous avons bien $y = a' + b \in A + B$. Donc $]x - \epsilon, x + \epsilon[\in A + B$ et $A + B$ est un ouvert.

2. La réciproque est fausse. Soit $A =]0, 1] \cup [2, 3[$ et $B =]1, 2] \cup [3, 4[$. Ils sont tous les deux ouverts et pourtant $A + B =]1, 7[$ est bien un ouvert.

Exercice 6 : Produit cartésien

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\|\cdot\|_{E\times F}$ l'application définie sur $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{E\times F}$ est une norme.
2. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont des ouverts alors $A \times B$ est un ouvert.
3. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont des fermés alors $A \times B$ est un fermé.

Réponses :

1. Il faut montrer que l'application $\|\cdot\|_{E\times F}$ vérifie les 3 propriétés suivantes
   (a) $\|(x, y)\|_{E\times F} = 0 \Longrightarrow (x, y) = (0_E, 0_F)$
   (b) $\|\lambda(x, y)\|_{E\times F} = |\lambda| \, \|(x, y)\|_{E\times F}$
   (c) $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_{E\times F} \leq \|(x_1, y_1)\|_{E\times F} + \|(x_2, y_2)\|_{E\times F}$
   Démonstration :

(a) Soit $\|(x,y)\|_{E\times F}=0$, alors $\max(\|x\|_E,\|y\|_F)=0$ ce qui implique $\|x\|_E=\|y\|_F=0$ et donc $(x,y)=(0_E,0_F)$, puisque $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ sont des normes.

(b) $\|\lambda(x,y)\|_{E\times F}=\max\left(\|\lambda x\|_E,\|\lambda y\|_F\right)=\max\left(|\lambda|\,\|x\|_E,|\lambda|\,\|y\|_F\right)=|\lambda|\,\|(x,y)\|_{E\times F}$

(c) On cherche à déterminer $\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_{E\times F}=\left\|\Big((x_1+x_2),(y_1,y_2)\Big)\right\|_{E\times F}=\max(\|x_1+x_2\|_E,\|y_1+y_2\|_F)$. Or

$$\|x_1+x_2\|_E\le\|x_1\|_E+\|x_2\|_E\le\max(\|x_1\|_E,\|y_1\|_F)+\max(\|x_2\|_E,\|y_2\|_F)$$
$$\|y_1+y_2\|_F\le\|y_1\|_F+\|y_2\|_F\le\max(\|x_1\|_E,\|y_1\|_F)+\max(\|x_2\|_E,\|y_2\|_F)$$

On voit donc que

$$\max(\|x_1+x_2\|_E,\|y_1+y_2\|_F)\le\max(\|x_1\|_E,\|y_1\|_F)+\max(\|x_2\|_E,\|y_2\|_F).$$

Finalement

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_{E\times F}\le\|(x_1,y_1)\|_{E\times F}+\|(x_2,y_2)\|_{E\times F}$$

2. Soit $(x,y)\in A\times B$. Il existe $r_1>0$ et $r_2>0$ tels que $B(x,r_1)\subset A$ et $B(y,r_2)\subset B$. Posons $r=\min(r_1,r_2)$. Soit $(z,t)\in B((x,y),r)$. On a ...

TD3 : Intérieur et Adhérence

Exercice 1 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles tels que

$$A \subset B \subset E \text{ et } B \text{ fermé}$$

1. Montrer alors que pour $\forall x \in C_E B$

$$\exists r > 0 \ / \ B(x, r) \cap A = \emptyset$$

2. Peut-on alors avoir $\overline{A} = B$ et si oui sous quelles conditions ?

Réponses :

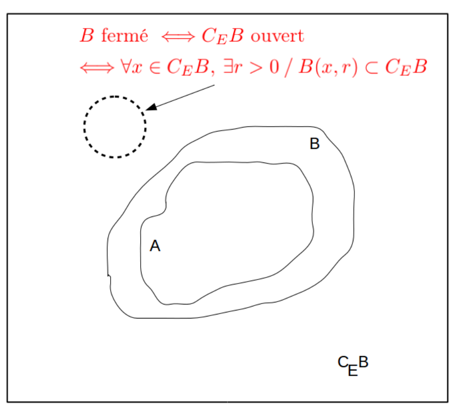
1. On a

$$B \text{ fermé } \iff C_E B \text{ ouvert } \iff \forall x \in C_E B, \exists r > 0 \ / \ B(x, r) \subset C_E B$$

Donc, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \cap B = \emptyset$. Or $A \subset B$, donc $B(x, r) \cap A = \emptyset$.

Finalement

$\forall x \in C_E B, \ \exists r > 0 \ / \ B(x, r) \cap A = \emptyset.$



2. Pour rappel :

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

D'après la question 1), on a montré que $\overline{A} \subset B$. Mais B peut être trop grand. Ainsi, $B \subset \overline{A}$ si et seulement

$$\forall x \in B \backslash A, \text{ on a :} \forall r > 0, \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

Et on a alors $B = \overline{A}$.

Exercice 2 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles tels que

$$B \subset A \subset E \text{ et } B \text{ ouvert}$$

1. Montrer alors que pour $\forall x \in B$

$$\exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$

2. Peut-on alors avoir $\mathring{A} = B$ et si oui sous quelles conditions ?

Réponses :

1. On a

$$B \text{ ouvert } \Longleftrightarrow \forall x \in B, \ \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset B$$

Or $B \subset A$, donc

$$\forall x \in B, \ x \in A \text{ et } \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset B \subset A$$

Donc

$$\forall x \in B, \ \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$

2. Pour rappel :

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$

Compte tenu de la question précédente, on sait que $B \subset \mathring{A}$. Mais B peut être trop petit. Finalement

$$\mathring{A} = B \text{ ssi } \forall x \in A \backslash B, \ \forall r > 0, \ B(x,r) \not\subset A$$

$$\mathring{A} \neq B \text{ ssi } \exists x \in A \backslash B, \ \exists r > 0, \ B(x,r) \subset A$$

Exercice 3 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Déterminer l'intérieur et l'adhérent de

1. l'ensemble A qui est la boule fermée de rayon r et de centre a
2. l'ensemble A qui est la boule ouverte de rayon r et de centre a

Réponses :

1. Déterminons $\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$:

   $\overline{A}$:
   Comme la boule fermée est un fermé alors $\overline{A} = A$

   $\overset{\circ}{A}$:
   On cherche le plus grand ouvert contenu dans A. Prenons comme candidat $C = B(a, r)$ (c'est-à-dire, la boule ouverte de centre a et de rayon r). Alors clairement :

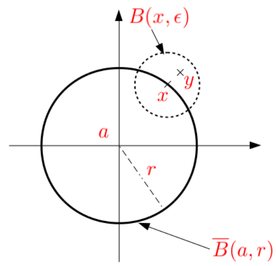
   $$\begin{aligned} &C \text{ est un ouvert} \\ &C \subset A \end{aligned} \tag{1}$$

   Compte tenu de l'exercice 2, on sait alors que $C \subset \overset{\circ}{A}$. On doit maintenant montrer que $\overset{\circ}{A} \subset C$. Or ceci est le cas si et seulement si

   $$\forall x \in A \backslash C,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \not\subset A$$

   et on aura alors $\overset{\circ}{A} = C$.

   On a
   $$A \backslash C = \overline{B}(a, r) \backslash B(a, r) = S(a, r)$$
   Soit $x \in S(a, r)$. Soit $B(x, \epsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ. On définit le point y sur la droite liant a et x. Voir figure ci-dessous.



On a alors $y - x = \lambda(x - a)$. De plus on choisit y a mi-chemin entre x et le bord de $B(x, \epsilon)$. On déduit de cela que

$$\|y - x\| = \frac{\epsilon}{2} = |\lambda| \, \|x - a\|$$

ce qui conduit à $|\lambda| = \lambda = \frac{\epsilon}{2r}$. On a donc

$$y - x = \frac{\epsilon}{2r}(x - a)$$

ce qui permet d'écrire

$$y - a = (1 + \frac{\epsilon}{2r})(x - a)$$

Prenons maintenant la norme de l'expression précédente

$$\|y - a\| = (1 + \frac{\epsilon}{2r}) \, \|x - a\| = (1 + \frac{\epsilon}{2r}) \times r$$

or $\epsilon > 0$ donc

$$\|y - a\| > r$$

Finalement, $\forall \epsilon > 0$, $y \notin A$ donc $B(x, \epsilon) \not\subset A$. On a donc bien $\mathring{A} = C$.

2. Déterminons $\overline{A}$ et $\mathring{A}$:

   $\underline{\mathring{A} \text{ :}}$

   Comme la boule ouverte est un ouvert alors $\mathring{A} = A$

   $\underline{\overline{A} \text{ :}}$

   On cherche le plus petit fermé contenant A. Prenons comme candidat $C = \overline{B}(a, r)$. Alors clairement :

$$\begin{aligned} &C \text{ est un fermé} \\ &A \subset C \end{aligned} \tag{2}$$

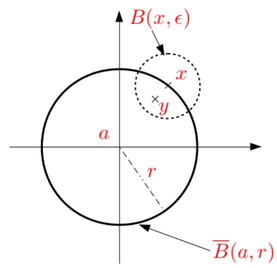
Compte tenu de l'exercice 1, on sait alors que $A \subset C$. On doit maintenant montrer que $C \subset A$. Or ceci est le cas si et seulement si

$$\forall x \in C \backslash A,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

On a

$$C \backslash A = \overline{B}(a, r) \backslash B(a, r) = S(a, r)$$

Soit $x \in S(a, r)$. Soit $B(x, \epsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ. On définit le point y sur la droite liant a et x. Voir figure ci-dessous.



On a alors $y - x = \lambda(a - x)$. De plus on choisit y a mi-chemin entre x et le bord de $B(x, \epsilon)$. On déduit de cela que

$$\|y - x\| = \frac{\epsilon}{2} = |\lambda| \, \|a - x\|$$

ce qui conduit à $|\lambda| = \lambda = \frac{\epsilon}{2r}$. On a donc

$$y - x = \frac{\epsilon}{2r}(a - x)$$

ce qui permet d'écrire

$$y - a = (1 - \frac{\epsilon}{2r})(x - a)$$

Prenons maintenant la norme de l'expression précédente

$$\|y - a\| = (1 - \frac{\epsilon}{2r}) \, \|x - a\| = \left|1 - \frac{\epsilon}{2r}\right| \times r$$

or $\epsilon > 0$ donc

$$\|y - a\| < r$$

Finalement, $\forall \epsilon > 0$, $\|y - a\| < r$ donc $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $\overline{A} = C$.

Exercice 4 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles de E. Montrer que

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
4. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Réponses :

1. Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

Or $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des fermés. Ceci implique que

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

De plus

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Finalement, puisque $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, on a

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2. Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

3. Montrons $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$:

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \\ \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B} \end{cases} \Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

or $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert puisque $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts, donc
$\overset{\circ}{\widehat{\mathring{A} \cap \mathring{B}}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

4. Laissée en exercice.

Exercice 5 :

Déterminer l'adhérent et l'intérieur des ensembles donnés dans l'exercice 3 du TD2.

Réponses :

1. Soit $A = [0, 1[$

   (a) Détermination de $\mathring{A}$:
   On sait que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A. Proposons donc $C =]0, 1[$. Comme C est un ouvert contenu dans A alors on sait que $C \subset \mathring{A}$. Il reste à savoir si $\mathring{A} \subset C$. Pour cela vérifions que pour $\forall x \in A \backslash C$, $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset A$. Ici $A \backslash C = \{0\}$. Or clairement toute boule centrée en 0 ne sera pas contenu dans A. En effet, considérons $\forall r > 0$ la boule $B(0, r) =]-r, r[$. Prenons le point $y = -\frac{r}{2} \in B(0, r)$. Donc $\forall r > 0$, $y < 0$ ce qui implique $y \notin A$. Finalement $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset A$ et donc $\mathring{A} = C$.

   (b) Détermination de $\overline{A}$:
   On sait que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Prenons donc comme candidat $C = [0, 1]$. Or C est un fermé et A est contenu dans C, on sait donc $\overline{A} \subset C$. Il faut donc vérifier que $C \subset \overline{A}$, c'est-à-dire que $\forall x \in C \backslash A$

   $$\forall r > 0, \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

   Ici $C \backslash A = \{1\}$. Soit $B(1, r) =]1 - r, 1 + r[$ la boule centrée en 1 de rayon $r > 0$. Prenons $y = 1 - \frac{r}{2} \in B(1, r)$. On déduit donc $\forall r > 0$, $y < 1$ ce qui implique que $y \in A$ et donc $B(1, r) \cap A \neq \emptyset$. Finalement $\overline{A} = C$.

2. Soit $C = [0, +\infty[$

(a) Détermination de $\overset{\circ}{C}$:
On sait que l'intérieur de C est le plus grand ouvert contenu dans C. Proposons donc $\tilde{C} =]0, +\infty[$. Comme $\tilde{C}$ est un ouvert contenu dans C alors on sait que $\tilde{C} \subset \overset{\circ}{C}$. Il reste à savoir si $\overset{\circ}{C} \subset \tilde{C}$. Pour cela vérifions que pour $\forall x \in C \backslash \tilde{C}$, $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset C$. Ici $C \backslash \tilde{C} = \{0\}$. Or clairement toute boule centrée en 0 ne sera pas contenu dans C. En effet, considérons $\forall r > 0$ la boule $B(0, r) =] - r, r[$. Prenons le point $y = -\frac{r}{2} \in B(0, r)$. Donc $\forall r > 0$, $y < 0$ ce qui implique $y \notin C$. Finalement $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset C$ et donc $\overset{\circ}{C} = \tilde{C}$.

(b) Détermination de $\overline{C}$:
$\overline{C} = C$ car C est un fermé.

3. Soit $D =]0, 1[\cup \{2\}$

(a) Détermination de $\overset{\circ}{C}$:
On sait que l'intérieur de D est le plus grand ouvert contenu dans D. Proposons donc $C =]0, 1[$. Comme C est un ouvert contenu dans D alors on sait que $C \subset \overset{\circ}{D}$. Il reste à savoir si $\overset{\circ}{D} \subset C$. Pour cela vérifions que pour $\forall x \in D \backslash C$, $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset D$. Ici $D \backslash C = \{2\}$. Or clairement toute boule centrée en 2 ne sera pas contenu dans D. En effet, considérons $\forall r > 0$ la boule $B(2, r) =]2 - r, 2 + r[$. Prenons le point $y = 2 + \frac{r}{2} \in B(2, r)$. Donc $\forall r > 0$, $y > 2$ ce qui implique $y \notin D$. Finalement $\forall r > 0$, $B(x, r) \not\subset D$ et donc $\overset{\circ}{D} = C$.

(b) Détermination de $\overline{D}$:
<u>Méthode 1 :</u>
On sait que $\overline{D}$ est le plus petit fermé contenant D. Prenons donc comme candidat $C = [0, 1] \cup \{2\}$. Or C est un fermé (union de deux fermés) et D est contenu dans C, on sait donc $\overline{D} \subset C$. Il faut donc vérifier que $C \subset \overline{D}$, c'est-à-dire que $\forall x \in C \backslash D$

$$\forall r > 0, \ B(x, r) \cap D \neq \emptyset$$

Ici $C \backslash D = \{0\} \cup \{1\}$. Soit $B(1, r) =]1 - r, 1 + r[$ la boule centrée en 1 de rayon $r > 0$. Alors $\forall r > 0$, $B(1, r) \cup D \neq \emptyset$. De même en 0. Finalement $\overline{D} = C$.

Méthode 2 :
D'après l'exercice précédent, on sait que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. En posant $A =]0,1[$ et $B = \{2\}$, on a $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = \{2\}$ et donc $\overline{D} = [0,1] \cup \{2\}$

4. Soit $E = \mathbb{N}$:
$\overset{\circ}{E} = \emptyset$ et $\overline{E} = E$.

5. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 4\}$:
On sait que $F = B_{\|\cdot\|_2}(0,2)$. F est donc une boule ouverte et comme on l'a montré en toute généralité pour une boule ouverte :
$$\overset{\circ}{F} = F \text{ et } \overline{F} = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,2).$$
6. Soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 2\}$
On sait que $G = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,\sqrt{2})$. G est donc une boule fermée et comme on l'a montré en toute généralité pour une boule fermée :
$$\overset{\circ}{G} = B_{\|\cdot\|_2}(0,\sqrt{2}) \text{ et } \overline{G} = G.$$
7. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < |x-1| < 1\}$
On a vu que H est un ouvert donc $\overset{\circ}{H} = H$.

Pour l'adhérent, nous prenons le candidat
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq |x-1| \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 2\}$

Clairement C est un fermé et $H \subset C$ donc $\overline{H} \subset C$. Mais C peut être trop grand. On doit donc vérifier que
$\forall x \in C \backslash H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2\}$, $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap H \neq \emptyset$. Or ceci est trivialement vrai. Donc $\overline{H} = C$.

8. Soit $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
$\overline{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
$\overset{\circ}{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$

9. Soit $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$
   J est un fermé. Donc $\overline{J} = J$.
   $\overset{\circ}{J} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < y < x \text{ et } 0 < x < 3\}$

TD4 : Suites

Exercice 1 :

Donner un exemple de suite complexe $z_n = x_n + iy_n$ n'ayant aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$ mais telle que les suite x_n et y_n en aient dans $\mathbb{R}$.

Réponses :
Introduisons les deux suites suivantes

$$x_n = \begin{cases} x_{2n} = 0 \\ x_{2n+1} = f(n) \end{cases} \quad \text{et } y_n \begin{cases} y_{2n} = g(n) \\ x_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

avec $f(n)$ et $g(n)$ deux fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Donc f_n et g_n ont chacune 0 comme valeur d'adhérence. Toutefois

$$z_n = \begin{cases} z_{2n} = ig(n) \\ z_{2n+1} = f(n) \end{cases}$$

n'a aucune valeur d'adhérence, puisque $f(n)$ et $g(n)$ sont strictement croissantes.

Rappel : l est une valeur d'adhérence ssi, $\exists \phi$ telle que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \left\| x_{\phi(n)} - l \right\| < \epsilon$$

où ϕ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit u_n et v_n deux suites réelles telles que $u_n - v_n$ converge vers 0. Montrer que u_n et v_n ont les mêmes valeurs d'adhérences.

Réponses :
Posons $z_n = u_n - v_n$. Comme z_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, 0 est la seule valeur d'adhérence de z_n.

Alors, soit l une valeur d'adhérence de u_n. Il existe donc $\phi\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\phi(n)}$ converge vers l. Mais $z_{\phi(n)}$ converge vers 0 car 0 est la seule valeur d'adhérence de z_n puisque z_n converge vers 0. Donc

$$z_{\phi(n)} = u_{\phi(n)} - v_{\phi(n)}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z_{\phi(n)} = 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_{\phi(n)} - \lim_{n \longrightarrow \infty} v_{\phi(n)} = l - \lim_{n \longrightarrow \infty} v_{\phi(n)}$$

et puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_{\phi(n)} = l$

$$0 = l - \lim_{n \longrightarrow \infty} v_{\phi(n)} \Longleftrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} v_{\phi(n)} = l$$

En effectuant le même raisonnement sur $v_{\phi(n)}$, on obtiendrait le même résultat. Finalement u_n et v_n ont les mêmes valeurs d'adhérences.

Exercice 3 :

Donner des exemples de suites ayant :

1. aucune valeur d'adhérence.
2. une unique valeur d'adhérence.
3. deux valeurs d'adhérence.
4. trois valeurs d'adhérence.
5. une unique valeur d'adhérence mais la suite ne converge pas.

Réponses :

1. La suite définie par

$$\begin{array}{rccl} x_n & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & n & \mapsto & (2n, \frac{1}{n}) \end{array}$$

   n'a aucune valeur d'adhérence.
2. La suite définie par

$$\begin{array}{rccl} x_n & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} x_{2n} = 0 \\ x_{2n+1} = n \end{cases} \end{array}$$

   a une unique valeur d'adhérence.
3. La suite $u_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence, à savoir 1 et -1.

4. La suite
$$\begin{cases} x_{2n} = (-1)^n \\ x_{2n+1} = 3 \end{cases}$$
a 3 valeurs d'adhérence, à savoir 3, 1 et -1. En effet :
$x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = -1$,...
5. voir la réponse à la question 2).

Exercice 4 :

Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts, des fermés, les deux ou aucun des deux. Déterminer également leur adhérence.

1. $A = [0, 1[$
2. $C = [0, +\infty[$
3. $D =]0, 1[\cup \{2\}$
4. $E = \mathbb{N}$
5. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < |x - 1| < 1\}$ (que fermé)
6. $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
7. $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq x \leq 3\}$ (que ouvert)

Réponses :

1. Nous devons déterminer, en utilisant les suites, si $A = [0, 1[$ est un fermé, un ouvert ainsi que son adhérent.
   (a) <u>Fermé ?</u>
   A est un fermé si et seulement si toute suite convergente de A converge dans A. Or si on prend la suite $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $x_n \in A$ mais $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = 1 \notin A$. Donc A n'est pas un fermé.

   (b) <u>Ouvert ?</u>
   A est un ouvert si et seulement si $C_{\mathbb{R}}A =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ est un fermé. Or $C_{\mathbb{R}}A$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente de $C_{\mathbb{R}}A$ converge dans $C_{\mathbb{R}}A$. Or si on prend la suite $y_n = -\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $y_n \in C_{\mathbb{R}}A$ mais $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0 \notin C_{\mathbb{R}}A$. Donc $C_{\mathbb{R}}A$ n'est pas un fermé, donc A n'est pas un ouvert.

(c) Adhérent ?

L'adhérence de A est l'ensemble des points vers lesquels les suites convergentes de A convergent. On a alors

$$\text{Soit } 0 \leq x_n < 1 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ donc } \overline{A} \subset [0,1]$$

(l'implication ci-dessus correspond au passage à la limite).

Il faut maintenant vérifier que $[0,1] \subset \overline{A}$. On sait que $A \subset \overline{A}$. Intéressons nous donc à $\overline{A} \backslash A = \{1\}$. Or il existe bien une suite d'éléments de $A = [0,1[$ qui converge vers 1, à savoir $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Nous devons déterminer, en utilisant les suites, si $C = [0, +\infty[$ est un fermé, un ouvert ainsi que son adhérent.

   (a) Fermé ?

   C est un fermé si et seulement si toute suite convergente de C converge dans C.

   $$0 \leq x_n \Longrightarrow 0 \leq x \text{ donc } x \in [0, +\infty[$$

   donc C est un fermé.

   (b) Ouvert ?

   C est un ouvert si et seulement si $C_{\mathbb{R}}C =]-\infty, 0[$ est un fermé. Or $C_{\mathbb{R}}C$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente de $C_{\mathbb{R}}C$ converge dans $C_{\mathbb{R}}C$. Or si on prend la suite $y_n = -\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $y_n \in C_{\mathbb{R}}C$ mais $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0 \notin C_{\mathbb{R}}C$. Donc $C_{\mathbb{R}}C$ n'est pas un fermé, donc C n'est pas un ouvert.

   (c) Adhérent ?

   C est un fermé donc $\overline{C} = C$.

3. Nous devons déterminer, en utilisant les suites, si $D =]0,1[\cup \{2\}$ est un fermé, un ouvert ainsi que son adhérent.

   (a) Fermé ?

   D est un fermé si et seulement si toute suite convergente de D converge dans D. Or si on prend la suite $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n > 1$, alors $x_n \in D$ mais $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = 0 \notin D$. Donc D n'est pas un fermé.

(b) Ouvert ?
D est un ouvert si et seulement si $C_{\mathbb{R}}D =]-\infty, 0] \cup [1, 2[\cup]2, +\infty[$ est un fermé. Or $C_{\mathbb{R}}D$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente de $C_{\mathbb{R}}D$ converge dans $C_{\mathbb{R}}D$. Or si on prend la suite $y_n = 2 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $y_n \in C_{\mathbb{R}}D$ mais $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 2 \notin C_{\mathbb{R}}D$. Donc $C_{\mathbb{R}}D$ n'est pas un fermé, donc D n'est pas un ouvert.

(c) Adhérent ?
L'adhérence de D est l'ensemble des points vers lesquels les suites convergentes de D convergent. On a alors

$$\begin{cases} \text{Soit } 0 < x_n < 1 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ \text{Soit } x_n = 2 \Longrightarrow x = 2 \end{cases}$$

(les implications ci-dessus correspondent au passage à la limite).

donc $\overline{D} \subset [0, 1] \cup \{2\}$.

Vérifions maintenant que $[0, 1] \cup \{2\} \subset \overline{D}$. Or $D \subset \overline{D}$. Intéressons nous donc à $\overline{D} \backslash D = \{0\} \cup \{1\}$. Or il existe bien une suite d'éléments de $D = [0, 1] \cup \{2\}$ qui converge vers 1, à savoir $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De même pour 0, à savoir la suite $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Laissée en exercice car du même type que les trois questions précédentes.

5. Nous devons déterminer, en utilisant les suites, si $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < |x - 1| < 1\}$ est un fermé, un ouvert ainsi que son adhérent.
Fermé ?
H est un fermé si et seulement si toute suite convergente de H converge dans H. Or si on prend la suite $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, alors $x_n \in H$ mais $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = (0, 0) \notin H$. Donc H n'est pas un fermé.

6. Nous devons déterminer, en utilisant les suites, si $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$ est un fermé, un ouvert ainsi que son adhérent.
   (a) Fermé ?
   I est un fermé si et seulement si toute suite convergente de I converge dans I. Or si on prend la suite $u_n = (1 - \frac{1}{n}, 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

alors $u_n \in I$ mais $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = (1,0) \notin I$. Donc I n'est pas un fermé.

(b) Ouvert ?

I est un ouvert si et seulement si $C_{\mathbb{R}^2}I$ est un fermé. Or $C_{\mathbb{R}^2}I$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente de $C_{\mathbb{R}^2}I$ converge dans $C_{\mathbb{R}^2}I$. Or si on prend la suite $u_n = (0, 1-\frac{1}{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \in C_{\mathbb{R}^2}I$ mais $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = (0,1) \notin C_{\mathbb{R}^2}I$. Donc $C_{\mathbb{R}^2}I$ n'est pas un fermé, donc I n'est pas un ouvert.

(c) Adhérent ?

L'adhérence de I est l'ensemble des points vers lesquels les suites convergentes de I convergent. On a alors

$$\text{Soit } \begin{cases} -1 < x_n < 1 \\ -1 \leq y_n \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

(l'implication ci-dessus correspond au passage à la limite).

Donc toute suite (x_n, y_n) converge dans
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$.

Donc $\overline{I} \subset C$.

Etudions maintenant $C \backslash I$ afin de vérifier que $C \subset \overline{I}$. Alors

$$\begin{aligned} C\backslash I = A \cup B \text{ où } A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -1, \ -1 \leq y \leq 1\big\} \\ \text{et } B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = +1, \ -1 \leq y \leq 1\big\} \end{aligned}$$

Prenons maintenant $\forall y \in [-1,1]$, alors $u_n = (-1+\frac{1}{n}, y) \in I$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = (1,0) \in C\backslash I$. On peut faire la même étude pour B. Ainsi $\overline{I} = C$.

TD5 : Limites et Continuités

Exercice 1 :

1. Montrer que si x et y sont des réels alors $2|xy| \leq x^2 + y^2$
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in A$, on a :

$$|f(x,y)| \leq \frac{7}{2} \|(x,y)\|_2 \text{ avec } \frac{7}{2} \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   (b) En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

Réponses :

1. Montrons que $2|xy| \leq x^2 + y^2$:
   Pour cela, remarquons

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$$

   ce qui conduit à

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

2. On considère maintenant la fonction

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   (a) Montrons que $|f(x,y)| \leq 4 \|(x,y)\|_2$ où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|f(x,y)| = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   or

$$x^2 \leq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|_2 \quad \text{(trivial)}$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|_2^2 \quad \text{(trivial)}$$
$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \|(x,y)\|_2^2 \quad \text{(d'après la question 1)}$$

qui injecté dans l'expression précédente donne

$$|f(x,y)| \leq \frac{3\,\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2} + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2\,\|(x,y)\|_2} = \frac{7}{2}\,\|(x,y)\|_2$$

(b) D'après la question précédente

$$|f(x,y)| \leq \frac{7}{2}\,\|(x,y)\|_2 = \frac{7}{2}(\sqrt{x^2+y^2}) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc cette expression tend vers 0 quelque soit la façon dont x et y tendent vers 0. On déduit donc que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$$

Exercice 2 :

Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$
2. $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$
3. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
6. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$
8. $f(x,y) = \frac{x+3y}{x^2-y^2}$
9. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$
10. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
11. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
12. $f(x,y) = x^y$
13. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x)\ ,\ \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Réponses :

1. Soit $f(x,y) = (x+y)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$. La présence du sinus doit nous inciter à prendre la valeur absolue

$$|f(x,y)| \leq |x+y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

On déduit donc que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$$

2. Soit $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$. On a plusieurs méthodes.

<u>Méthode 1 : en cartésien</u>
Prenons le chemin $(x^+,0)$ alors

$$\lim_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} f(x,y) = \lim_{(x,0)\longrightarrow(0,0)} \frac{1}{x} = +\infty$$

Tandis que le chemin $(0,y^+)$ aboutit à

$$\lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} -\frac{1}{y} = -\infty$$

Ainsi, $f(x,y)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>Méthode 2 : caractérisation séquentielle</u>
Prenons la suite $u_n = (\frac{1}{n},0)$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin $(x,0)$) alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(u_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} n = +\infty$$

Tandis que la suite $v_n = (0,\frac{1}{n})$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin $(0,y)$) donne

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(v_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} -n = -\infty$$

Ainsi, $f(x,y)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>Méthode 3 : coordonnées polaires</u>
On pose maintenant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi

$$f(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho(\cos(\theta) - \sin(\theta))}$$

clairement, on voit sur cette expression que le résultat dépend de θ et que de plus il peut tendre vers l'infini. Prenons par exemple le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = 0)$ (qui correspond au chemin cartésien $(x^+, 0)$), on alors

$$\lim_{(\rho,\theta=0)\longrightarrow(0^+,0)} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim_{(\rho,\theta=0)\longrightarrow(0^+,0)} \frac{1}{\rho} = +\infty$$

et prenons le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = \frac{\pi}{2})$ (qui correspond au chemin cartésien $(0, x^+)$), on alors

$$\lim_{(\rho,\theta=\frac{\pi}{2})\longrightarrow(0^+,\frac{\pi}{2})} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim_{(\rho,\theta=\frac{\pi}{2})\longrightarrow(0^+,\frac{\pi}{2})} -\frac{1}{\rho} = -\infty$$

et encore une fois, on constate bien que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3. Soit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Il y a encore plusieurs méthodes.

   <u>Méthode 1 : en cartésien</u>
   Commençons par essayer d'évaluer la fonction en calculant par exemple les limites de $f(x,0) = 1$ et $f(0,y) = -1$. Ce qui implique que

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} f(x,0) = \lim\limits_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} 1 = 1 \\ \lim\limits_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} f(0,y) = \lim\limits_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} -1 = -1 \end{cases}$$

   donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

   <u>Méthode 2 : caractérisation séquentielle</u>
   Prenons la suite $u_n = (\frac{1}{n}, 0)$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin $(x^+, 0)$) alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(u_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1$$

   Tandis que la suite $v_n = (0, \frac{1}{n})$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin $(0, y^+)$) donne

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(v_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} -1 = -1$$

Ainsi, $f(x, y)$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

<u>Méthode 3 : coordonnées polaires</u>
On pose maintenant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi

$$f(x, y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho, \theta) = \frac{\rho^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\rho^2} = \cos(2\theta)$$

clairement, on voit sur cette expression que le résultat dépend de θ et que donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. Prenons par exemple le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = 0)$ (qui correspond au chemin cartésien $(x^+, 0)$), on alors

$$\lim_{(\rho,\theta=0)\longrightarrow(0^+,0)} \tilde{f}(\rho, \theta) = \lim_{(\rho,\theta=0)\longrightarrow(0^+,0)} 1 = 1$$

et prenons le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = \frac{\pi}{2})$ (qui correspond au chemin cartésien $(0, x^+)$), on alors

$$\lim_{(\rho,\theta=\frac{\pi}{2})\longrightarrow(0^+,\frac{\pi}{2})} \tilde{f}(\rho, \theta) = \lim_{(\rho,\theta=\frac{\pi}{2})\longrightarrow(0^+,\frac{\pi}{2})} -1 = -1$$

et encore une fois, on constate bien que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

4. Soit $f(x, y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$. Comme précédemment, nous pouvons utiliser les 3 méthodes.

<u>Méthode 1 : en cartésien</u>
Commençons par essayer d'évaluer la fonction en calculant par exemple les limites de $f(x, 0) = 1$ et $f(x, x) = \frac{3}{2}$. Ce qui implique que

$$\begin{cases} \lim_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} 1 = 1 \\ \lim_{(x,x)\longrightarrow(0^+,0^+)} f(x, x) = \lim_{(x,x)\longrightarrow(0^+,0^+)} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

<u>Méthode 2 : caractérisation séquentielle</u>

Prenons la suite $u_n = (\frac{1}{n}, 0)$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin $(x^+, 0)$) alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 = 1$$

Tandis que la suite $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ qui tant bien vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini (ce chemin correspond en cartésien au chemin (x^+, x^+)) donne

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(v_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, $f(x,y)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$.

<u>Méthode 3 : coordonnées polaires</u>
On pose maintenant

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi

$$f(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho, \theta) = 1 + \cos(\theta)\sin(\theta)$$

clairement, on voit sur cette expression que le résultat dépend de θ et que donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$. Prenons par exemple le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = 0)$ (qui correspond au chemin cartésien $(x^+, 0)$), on alors

$$\lim_{(\rho, \theta=0) \longrightarrow (0^+, 0)} \tilde{f}(\rho, \theta) = \lim_{(\rho, \theta=0) \longrightarrow (0^+, 0)} \Big(1 + \cos(\theta)\sin(\theta)\Big) = 1$$

et prenons le chemin $(\rho \longrightarrow 0, \theta = \frac{\pi}{4})$ (qui correspond au chemin cartésien (x^+, x^+)), on alors

$$\lim_{(\rho, \theta=\frac{\pi}{4}) \longrightarrow (0^+, \frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho, \theta) = \lim_{(\rho, \theta=\frac{\pi}{4}) \longrightarrow (0^+, \frac{\pi}{4})} \Big(1 + \cos(\theta)\sin(\theta)\Big) = \frac{3}{2}$$

et encore une fois, on constate bien que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

5. Soit $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

<u>Méthode 1 : À tatons</u>
Commençons par évaluer la fonction sur quelques chemins (ici je me

limite aux chemins cartésiens mais vous pouvez encore une fois utiliser les deux autres méthodes). Par exemple $f(x,x) = \frac{x}{2}$, $f(x,0) = 0$ et $f(0,x) = 0$. Ainsi

$$\lim_{(x,x)\longrightarrow(0^+,0^+)} f(x,x) = \lim_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} f(x,0) = \lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} f(x,0) = 0$$

À ce stade, nous ne pouvons pas conclure que 0 est la limite de f en $(0,0)$ mais c'est un bon candidat. Cherchons donc à déterminer

$$|f(x,y) - 0|$$

si cette quantité tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ alors la limite de la fonction en $(0,0)$ sera 0. Alors

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \frac{|yx| \times |x|}{x^2 + y^2}$$

or comme nous l'avons vu dans l'exercice 1

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

ce qui permet d'écrire

$$|f(x,y)| = \frac{|yx| \times |x|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|}{2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc finalement la limite de la fonction f en $(0,0)$ est 0.

Méthode 2 : coordonnées polaires On peut également directement passer en coordonnées polaires en posant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi

$$f(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

et clairement, $\forall\theta$, $\tilde{f}$ tend vers 0 quand ρ tend vers 0 et finalement

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$$

6. Soit $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

   Il s'agit de faire très exactement la même chose que précédemment. Donc cette question est laissée en exercice.

7. Soit $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$

   On peut encore utiliser les différentes méthodes précédentes. Mais nous allons nous contenter ici des coordonnées polaires. Ainsi en posant
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$
   Ainsi
$$f(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \rho^2\frac{\cos^3(\theta)}{\sin(\theta)}$$
   Mais en réalité, il est très difficile de conclure de cette façon. Mais on sent que ca peut ne pas converger si le dénominateur converge trop vite vers 0.

   Méthode 2 : en cartésien
   Essayer d'évaluer la fonction en calculant par exemple les limites de $f(0,y) = 0$ et $f(x,x^3) = 1$. Ce qui implique que
$$\begin{cases} \lim\limits_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} f(0,y) = \lim\limits_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} 0 = 0 \\ \lim\limits_{(x,x^3)\longrightarrow(0^+,0^+)} f(x,x^3) = \lim\limits_{(x,x^3)\longrightarrow(0^+,0^+)} 1 = 1 \end{cases}$$
   donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

   Méthode 3 : caractérisation séquentielle
   Laissée en exercice mais il suffit de poser $u_n = (0, \frac{1}{n})$ et $v_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3})$.

8. Soit $f(x,y) = \frac{x+3y}{x^2-y^2}$.
   Pas de limite en $(0,0)$. En cartésien, il suffit de prendre les chemins $(0,-x)$ et $(0,x)$ et en polaire de prendre $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$.

9. Soit $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.
   On sent que cette fonction à des bonnes chances de converger car le

numérateur convergera plus vite vers 0 que le dénominateur.

Méthode 1 : Par exemple $f(x,x) = |x| = f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = |y|$. Ainsi

$$\lim_{(x,x)\longrightarrow(0^+,0^+)} f(x,x) = \lim_{(x,0)\longrightarrow(0^+,0)} f(x,0) = \lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0^+)} f(0,y) = 0$$

À ce stade, nous ne pouvons pas conclure que 0 est la limite de f en $(0,0)$ mais c'est un bon candidat. Cherchons donc à déterminer

$$|f(x,y) - 0|$$

Ainsi

$$|f(x,y)| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

or $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|xy| \geq x^2+y^2$. Donc

$$|f(x,y)| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$$

Méthode 2 : en coordonnées polaires

On peut également directement passer en coordonnées polaires en posant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi

$$f(x,y) \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \frac{\rho}{|\cos(\theta)|+|\sin(\theta)|}$$

Or $\forall\theta$, le dénominateur ne s'annule jamais, donc

$$\lim_{(\rho,\theta)\longrightarrow(0,\theta)} \tilde{f}(\rho,\theta) = 0 = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$$

10. Soit $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Il y a encore plusieurs méthodes. Ici, on en traitera qu'une :

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

qui tend bien vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$

11. Soit $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

    Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$, on a
    $$|f(x, y)| = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$
    qui tend bien vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Donc f a pour limite 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

12. Soit $f(x, y) = x^y$

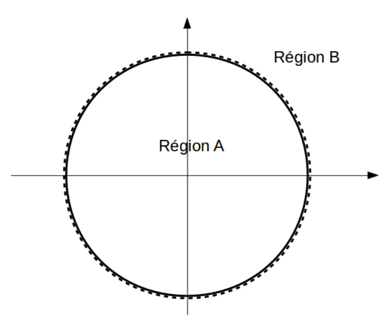
    On peut ré-écrire f de la façon suivante
    $$f(x, y) = e^{y\ln(x)}$$
    Alors $f(\frac{1}{n}, 0) = 1$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{\ln(n)}) = \frac{1}{e}$. Ainsi, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

13. Soit $f(x, y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x)\ ,\ \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{pour } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{pour } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$
Montrer que f est continue.

Réponses :



On doit vérifier que la fonction f est continue dans les régions A et B mais aussi à l'interface entre les deux régions. On doit donc vérifier qu'en tout point (x, y) la fonction admet une limite et notamment que sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, la limite est la même que l'on prenne l'expression $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1$ ou $-\frac{1}{2}x^2$.

Région A : l'expression $-\frac{1}{2}x^2$ admet bien une limite en tout point (x, y) tel que $x^2 + y^2 \leq 1$. Donc la fonction est continue sur la région A.

Région B : l'expression $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1$ admet bien une limite en tout point (x, y) tel que $x^2 + y^2 > 1$. Donc la fonction est continue sur la région B.

A l'interface A/B : soit (x_0, y_0) un point du cercle vérifiant donc $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x_0^2$$
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{2}x_0^2 + y_0^2 - 1 = -\frac{1}{2}x_0^2$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 :

1. On considère la fonction f_1 définie par

$$\begin{aligned} f_1 :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) \end{aligned}$$

   Déterminer si f_1 admet une limite en $(0, 0)$.

2. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \neq 0\}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f_2 :\ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

   Déterminer si f_2 admet une limite en $(0, 0)$.

Réponses :

1.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f_1(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}(1+x^2+y^2)\right)\times\left(\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\sin(y)}{y}\right) = 1\times 1 = 1$$

donc f_1 est continue en $(0,0)$.

2.

$$\lim_{(x,0)\longrightarrow(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,0)\longrightarrow(0,0)} \frac{1+x}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(0,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1+y}{-y^2} = -\infty$$

donc f_2 n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 5 :

La fonction suivante est-elle continue ?

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{pour } x^2+y^2>1 \\ x^2 & \text{pour } x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$$

Réponse :
Laissée en exercice (la fonction est continue).

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2}e^{-|y|/x^2} & \text{pour } x\neq 0 \\ 0 & \text{pour } x=0 \end{cases}$$

1. Soit λ un réel et $A_\lambda = \{(x,\lambda x)/x\in\mathbb{R}\}$. On note f_λ la restriction de f à A_λ. Calculer la limite de f_λ en $(0,0)$.
2. Soit $B = \{(x,x^2)/x\in\mathbb{R}\}$. On note g la restriction de f à B. Calculer la limite de g en $(0,0)$.
3. Que peut-on dire de la continuité de f en $(0,0)$.

Réponses :

1. On cherche à calculer la limite de f pour les points de la forme $(x, \lambda x)$.

$$f(x, \lambda x) = \begin{cases} \left|\frac{\lambda}{x}\right| \exp\left(-\left|\frac{\lambda}{x}\right|\right) \\ 0 \end{cases}$$

   d'où l'on déduit par croissance comparée

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left|\frac{\lambda}{x}\right| \exp\left(-\left|\frac{\lambda}{x}\right|\right) = 0$$

   Donc la limite de f_λ en $(0,0)$ est bien 0 et la fonction est continue en ce point.

2. $$f(x, x^2) = \frac{x^2}{x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{x^2}\right) = \frac{1}{e}, \ \forall x \neq 0$$

   et vaut 0 pour $x = 0$. Donc g n'est pas continue en $(0,0)$.

3. L'exercice est très intéressant. En effet, d'après la question 1), quelque soit la façon dont on s'approche de $(0,0)$ selon une droite alors on aboutit à la même limite (ici 0). Toutefois, d'après la question 2), on voit que si l'on s'approche par une parabole alors on obtient une autre limite. Ainsi la fonction n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions, étudier sa continuité en $(0,0)$.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si} & (x;y) = (0;0) \end{cases} \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} & (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si} & (x;y) = (0;0) \end{cases} \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2} & \text{si} & x \neq 0 \text{ ET } y \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \text{ OU } y = 0 \end{cases} \end{cases}$

Réponses :

1. Passons en coordonnées polaires. Ainsi

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = \Big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\Big) = 1$$

donc la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

2.

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x|x^2+|y|y^2}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

puisque $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ et $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$$|f(x,y)| \leq |x| + |y|$$

qui tend bien vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la limite de f en $(0,0)$ est 0 et finalement f est continue en $(0,0)$.

3. $f(x,x) = e^{-4} \neq 0$ donc la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

TD6 – 7 : Limites, Continuités et Compacité

Exercice 1 :

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables en $(0,0)$ sur leur domaine de définition D ?

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$, $f(x,y) = \frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y}$
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$, $f(x,y) = \frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}$
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq \pm y\}$, $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2-y^2}$
4. $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Réponses :

1. Considérons la suite $u_n = (x_n, y_n)$ tel que x_n et y_n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini et aussi tel que $x_n y_n > 0$. Alors
$$|f(u_n)| = \frac{|1-\cos(\sqrt{x_n y_n})|}{|y_n|} \sim \frac{\left|1-(1-\frac{\sqrt{x_n y_n}^2}{2})\right|}{|y_n|} = \frac{|x_n y_n|}{2|y_n|} = \frac{|x_n|}{2} \underset{x_n, y_n \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$
(l'équivalence est prise pour $x_n y_n \longrightarrow 0$). Ainsi la fonction admet bien une limite en $(0,0)$. Donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.

2. On va même montrer qu'elle est prolongeable en tout point de la forme (a,a) avec $a \in \mathbb{R}$. Pour cela, on introduit deux suites x_n et y_n telles que
$$x_n \neq y_n \text{ et } (x_n, y_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} (a,a)$$
Or
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(x) - \sin(x) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
Donc
$$f(x_n, y_n) = \frac{\cos(x_n)-\cos(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{1}{x_n - y_n}\left(-2\sin\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\sin\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)}{\frac{x_n-y_n}{2}} \times \frac{1}{2}$$

et comme $\forall z \in \mathbb{R}$, $\frac{\sin(z)}{z}$ tend vers 1 quand z tend vers 0, on a

$$f(x_n, y_n) = -\sin\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} -\sin(a)$$

Donc f est prolongeable par continuité en (a, a) en posant $f(a, a) = -\sin(a)$.

3. Clairement, cette fonction n'est pas prolongeable pour voir cela, il suffit de prendre les chemins $f(x, 0)$ et $f(0, y)$. En effet

$$f(x, 0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$$
$$f(0, y) = \frac{\sin(y^2)}{y^2} \underset{y \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -1$$

4. Pas prolongeable. En effet

$$f(x, x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{x^2 + 1} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$
$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} \underset{y \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Exercice 2 :

Etudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes

1. $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$
2. $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$

Réponses :

1. Clairement la fonction n'a pas de limite en $(0, 0)$. En effet

$$f(x, 0) = \frac{1}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \pm\infty$$

2. Laissée en exercice.

Exercice 3 :

Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $|| \cdot ||$ est 1-lipschitzienne de $(E, || \cdot ||)$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$.

Réponses :

Rappel :
L'application N de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ est 1-lipschitzienne si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E,\ \|N(x) - N(y)\|_F \leq \|x-y\|_E \tag{3}$$

Ici : l'application $\|\cdot\|_E$ est de E dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie que $\|\cdot\|_F = | \cdot |$. En injectant cela dans (3), on obtient

$$\forall (x,y) \in E,\ |\|x\|_E - \|y\|_E| \leq \|x-y\|_E$$

or cette expression est vraie puisqu'il s'agit de la 2ème inégalité triangulaire. CQFD

Exercice 4 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $|| \cdot ||_1$ définie par

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

Etudier la continuité de la forme linéaire ϕ de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f) = \int_0^1 tf(t)dt$$

Réponses :
Montrons que ϕ est continue sur E.

$$|\phi(f)| = \left| \int_0^1 tf(t)dt \right| \leq \int_0^1 |tf(t)|dt$$

Or $\forall t \in [0,1]$, $tf(t) \leq |f(t)|$. Donc

$$|\phi(f)| = \left| \int_0^1 tf(t)dt \right| \leq \int_0^1 |tf(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_1$$

ϕ est donc 1-lipschitzienne et donc continue.

Exercice 5 :

1. Rappeler la définition de la continuité uniforme.
2. Quelle est la négation de la continuité uniforme.
3. Soit a, b deux réels positifs tels que $a < b$. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[a, b]$.
4. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.
6. Montrer que la fonction $\ln(x)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Réponses :

1. Soit f une application de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Alors f est uniformément continue sur $A \subset E$ si et seulement si

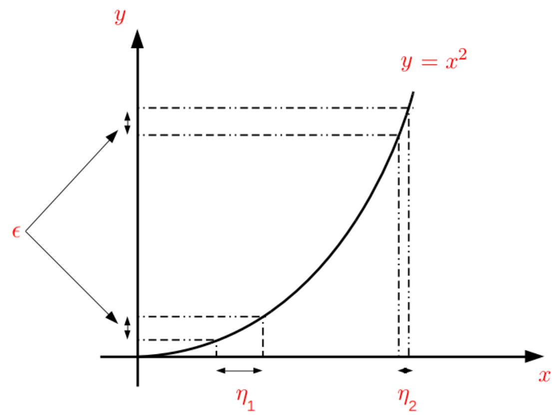
   $$\forall \epsilon > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \exists \eta > 0 \ /\ \|x - y\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon$$

2. f n'est pas uniformément continue sur A si et seulement si

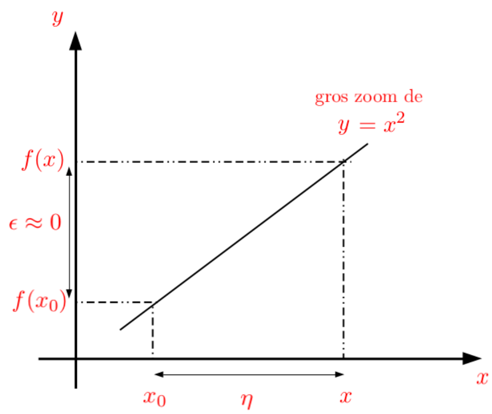
   $$\exists \epsilon > 0,\ \exists (x, y) \in A^2,\ /\ \forall \eta > 0,\ \|x - y\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F > \epsilon$$

3. Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Montrons que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

   (a) <u>Démonstration 1 :</u>
   On voit clairement sur la figure ci-dessous que si ϵ est fixé alors η dépend du point x.



On peut même écrire que η et ϵ sont liés par la dérivée de f. En effet, si ϵ et η sont suffisamment petit alors on peut utiliser la tangente de la fonction en x_0 (voir figure ci-dessous)



Alors

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(x_0)| \times |x - x_0|$$
$$\epsilon = |f'(x_0)|\eta$$

On voit donc que pour $\forall \epsilon > 0$, si on fixe ϵ, lorsque $x \longrightarrow a$, η augmente puisque $|f'(x)|$ diminue. Or, on cherche η indépendant de $x, y \in [a, b]$. Prenons donc le plus petit η qui correspond au cas $x = b$.

On fixe alors ϵ. On prend $\eta = \frac{\epsilon}{f'(b)} = \frac{\epsilon}{2b}$.

$$\text{alors } |x - y| < \eta = \frac{\epsilon}{2b} \Longleftrightarrow |2bx - 2by| < \epsilon$$

or

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y|$$

en effet :

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x+y| \leq 2b$$

et en multipliant par $|x-y|$, on obtient

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \times |x+y| = |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y|$$

on déduit donc que

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y| \leq \epsilon$$

Finalement

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ \exists \eta = \frac{\epsilon}{2b} \ /\ |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

et donc la fonction est bien uniformément continue.

Rq : nous avons, se faisant, démontré que la fonction est en fait $2b$-lipschitzienne (ce qui fera l'objet des démo 2 et 3). En effet nous avons montré que

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y|$$

(b) Démonstration 2 :
On va maintenant montrer que la fonction est κ-lipschitzienne sur $[a,b]$. On cherche donc $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x-y|$, ce qui dans notre cas s'écrit $|x^2 - y^2| \leq \kappa|x-y|$. Prenons $\kappa = 2b$ (en fait c'est la démo 3 qui justifiera cela). Alors

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x+y| \leq 2b$$

En multipliant par $|x-y|$, on obtient

$$|x+y| \times |x-y| = |x^2 - y^2| \leq 2b|x-y|$$

On a donc bien

$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leq 2b|x-y|$$

donc $f(x) = x^2$ est $2b$-lipschitzienne et donc uniformément continue sur $[a,b]$.

(c) Démonstration 3 : (fausse démo...c'est plus une intuition)
Montrons maintenant qu'une fonction dérivable, à dérivée bornée est alors lipschitzienne. La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $]a, b[$. La dérivée est même bornée sur cet ensemble.

$$\forall x \in [a, b],\ |f'(x)| \leq M,\ \text{avec } M \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\left| \lim_{x \longrightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M,\ \forall x, y \in [a, b]$$

Donc intuitivement, on peut imaginer que

$$\forall x, y \in [a, b],\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Donc, de tout ce que l'on vient de dire, on comprend que la dérivée joue un rôle crucial. En effet, plus la dérivée est grande en 1 point et plus pour une précision donnée ϵ, le η doit être petit puisque $\epsilon = |f'(x)|\eta$, donc si $f' \longrightarrow \infty$ alors $\eta \longrightarrow 0$ et il ne peut pas y avoir de convergence uniforme.

4. On voit que la dérivée n'est pas bornée lorsque $x \longrightarrow \infty$, il y a donc un problème en l'infini. Prenons les deux suites $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$. Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |y_n - x_n| = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} |f(y_n) - f(x_n)| = 2$$

Donc bien que les points x et y tendent vers l'infini et l'un vers l'autre, la distance de leur image reste supérieure à 0.

5. Encore une fois en 0, la dérivée n'est pas bornée. Si il y a un problème, le problème est donc en ce point. Prenons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$. Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |y_n - x_n| = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} |f(y_n) - f(x_n)| = \infty$$

Donc bien que les points x et y tendent vers 0 et l'un vers l'autre , la distance de leur image reste supérieure à 0.

6. Problème en 0 car la dérivée n'est pas bornée. Il suffit de prendre encore une fois $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$. Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |y_n - x_n| = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} |f(y_n) - f(x_n)| = \ln 2$$

Donc bien que les points x et y tendent vers 0 et l'un vers l'autre , la distance de leur image reste supérieure à 0.

Exercice 6 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{max(1, \|x\|)}$$

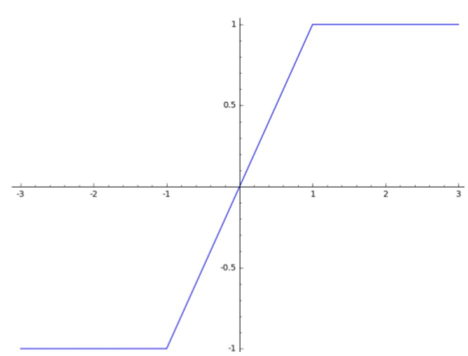
1. Dessiner le graphe de f pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Montrer que f est bornée sur E.
3. Montrer que f est continue sur E.
4. Montrer que f est 2-lipschitzienne sur E.

Réponses :

1. Pour représenter ce graphe, commençons par remarquer que

$$\text{Si } |x| \leq 1 \text{ alors } f(x) = x$$
$$\text{Si } |x| > 1 \text{ alors } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

donc



2. Montrons en toute généralité que f est bornée.
   Si $\|x\| \leq 1$, $f(x) = x$, donc $\|f(x)\| = \|x\| \leq 1$.
   Si $\|x\| > 1$, alors $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ d'où l'on déduit que $\|f(x)\| = 1$.

   Donc $\forall x \in E$, $0 \leq \|f(x)\| \leq 1$.
3. Si $\|x\| < 1$ alors $f(x) = x$, donc $\|f(x)\| = \|x\| < 1$
   donc f est continue sur ce sous-ensemble.

   Si $\|x\| > 1$ alors $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, donc $\|f(x)\| = \|x\| < 1$
   donc f est continue sur ce sous-ensemble.

   Si $\|x\| = 1$:
   Si on vient de x tel que $\|x\| < 1$ alors $f(x) = x$ lorsque $\|x\| = 1$.
   Si on vient de x tel que $\|x\| > 1$ alors $f(x) = x$ lorsque $\|x\| = 1$.

   Finalement f est continue sur E.

4. Montrons que f est 2-lipschitzienne :

   (a) Soit $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. Alors

   $$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

   On a donc bien trivialement

   $$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \leq 2\|x - y\|$$

   (b) Soit $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$. Alors

   $$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \left\|x - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{\|x \times \|y\| - y\|}{\|y\|} \\ &\leq \|x \times \|y\| - y\| = \|x \times \|y\| - x + x - y\| \\ &\leq \|x(\|y\| - 1) + x - y\| \leq \|x(\|y\| - 1)\| + \|x - y\| \end{aligned} \tag{4}$$

Or

$$\begin{aligned}\|x(\|y\|-1)\|+\|x-y\| &= \|x\|\,|\|y\|-1|+\|x-y\| \\ &= \|x\|\,(\|y\|-1)+\|x-y\| \text{ car } \|y\|>1\end{aligned} \tag{5}$$

En injectant (5) dans (4), on obtient

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\leq \|x\|\,(\|y\|-1)+\|x-y\| \\ &\leq \|y\|-1+\|x-y\| \\ &\leq \|y\|-\|x\|+\|x-y\| \text{ car } \|x\|\leq 1 \\ &\leq |\|y\|-\|x\||+\|x-y\| \leq 2\,\|x-y\|\end{aligned}$$

où la dernière transformation s'est faite à l'aide de la 2ème inégalité triangulaire $|\|y\|-\|x\|| \leq \|x-y\|$

Le cas $\|y\| \leq 1$ et $\|x\| > 1$ est parfaitement symétrique à celui-ci.

(c) Dernier cas : $\|x\| > 1$ et $\|y\| > 1$:

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{x\,\|y\| - y\,\|x\|}{\|x\|\ \|y\|} \right\| \\ &= \frac{\|(x\,\|y\| - y\,\|y\| + y\,\|y\| - y\,\|x\|)\|}{\|x\|\ \|y\|} \\ &\leq \frac{\left\|\Big((x-y)\,\|y\|\Big)\right\|}{\|x\|\ \|y\|} + \frac{\left\|y\Big(\|y\|-\|x\|\Big)\right\|}{\|x\|\ \|y\|} \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{\|x\|} + \frac{|\|y\|-\|x\||}{\|x\|}\end{aligned}$$

or comme $\|x\| > 1$, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\leq \|x-y\| + |\|y\|-\|x\|| \\ &\leq \|x-y\| + \|x-y\| = 2\,\|x-y\|\end{aligned}$$

où nous avons utilisé, pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, la 2ème inégalité triangulaire.

Bilan : f est bien 2-lipschitzienne.

Exercice 7 :

Pour chaque sous-ensemble suivant, indiquer si il s'agit de compact ou non.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 = 1\}$
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^5 = 1\}$
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x(1 - 2x)\}$

Réponses :

1. On considère l'ensemble $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^4 = 1\}$

   (a) Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^4$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On voit donc que $A_1 = f^{-1}(\{1\})$. Donc A_1 est l'antécédant d'un fermé par une application continue, donc A_1 est un fermé.

   (b) $x^2 + y^4 = 1 \Longrightarrow x^2 \leq 1$ et $y^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$.

   d'où l'on déduit que $\forall (x, y) \in A_1,\ \|(x, y)\|_\infty \leq 1$. Donc A_1 est borné.

   Finalement A_1 est un fermé borné donc un compact.

2. On considère l'ensemble $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^5 = 1\}$

   (a) Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^5$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On voit donc que $A_2 = f^{-1}(\{1\})$. Donc A_2 est l'antécédant d'un fermé par une application continue, donc A_2 est un fermé.

   (b) Nous avons $\forall x > 0,\ (x, \sqrt[5]{1 - x^2}) \in A_2$. Puisque x peut être arbitrairement grand, A_2 n'est pas borné.

   Finalement A_2 est un fermé, non borné, donc A_2 n'est pas un compact.

3. On considère l'ensemble $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$

   (a) Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2+xy+y^2$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On voit donc que $A_3 = f^{-1}(]-\infty, 1])$. Donc A_3 est l'antécédant d'un fermé par une application continue, donc A_3 est un fermé.

   (b)

   Finalement A_3 est un fermé, borné, donc A_3 est un compact.

4. On considère l'ensemble $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x, -x) \in A_4$$

   puisque si $(x, -x)$ alors $x^2 - 8x^2 + x^2 = -6x^2 < 1$.

   Or $\|(x,-x)\|_\infty = |x|$ qui est arbitrairement grand. Donc A_4 n'est pas borné donc A_4 n'est pas un compact.

5. On considère l'ensemble $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x(1-2x)\}$

   (a) Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 - x(1-2x)$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$. On voit donc que $A_5 = f^{-1}(\{0\})$. Donc A_5 est l'antécédant d'un fermé par une application continue, donc A_5 est un fermé.

   (b) $(x,y) \in A_5 \Longrightarrow x(1-2x) \geq 0 \Longrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$. On a donc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq x - 2x^2 \leq \frac{1}{2}$$

   d'où l'on déduit que $|y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Finalement :
   $(x,y) \in A_5 \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4} \Longrightarrow \|(x,y)\|_2^2 \leq \frac{3}{4}$.
   Donc A_5 est borné.

   Enfin, A_5 est un fermé borné donc un compact.

Exercice 8 :

Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E et $f : K \longrightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K,\ ||f(x) - x|| \geq ||f(c) - c||$$

3. En déduire que f admet un point fixe.

Réponses :

1. On rappelle que z est un point fixe si et seulement si $f(z) = z$. Supposons maintenant que f possède deux points fixes tels que $x \neq y$. L'hypothèse sur f donne

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

2. On introduit la fonction $\delta\ :\ x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K. La fonction δ est continue sur le compact K, elle admet donc un minimum en un point $c \in K$ et alors

$$\forall x \in K,\ \delta(x) \geq \delta(c)$$

3. Par l'absurde, si $f(c) \neq c$ alors

$$\delta\big(f(c)\big) = \big\|f\big(f(c)\big) - f(c)\big\| < \|f(c) - c\| = \delta(c)$$

ce qui contredit la minimalité de c. Ainsi $f(c) = c$ et c est le seul point fixe de f.

TD8 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 :

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$

Réponses :
Il est totalement clair que chacune des applications dérivées partielles existes (pour les deux premières parce qu'elles sont le produit de fonctions dérivables partout et la troisième car le terme $1+x^2y^2$ ne s'annule jamais).

1. On considère la fonction $f(x,y) = e^x \cos(y)$

   Méthode 1 : (bourrin et à n'utiliser que dans certains cas)
   On définit l'application

$$\begin{array}{rcccl} \phi_x & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \phi_x(t) = f\big((x,y)+t(1,0)\big) = f\big((x+t),y\big) = e^x e^t \cos(y) \end{array}$$

   Etudions maintenant la dérivée en $t=0$ de $\phi_x(t)$. Alors

$$\phi'_x(0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\phi_x(t)-\phi_x(0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{e^x e^t\cos(y) - e^x\cos(y)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} e^x\cos(y)\frac{e^t-1}{t}$$

   or quand $t\longrightarrow 0$, $e^t \sim 1+t$. Donc

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \phi'_x(0) = e^x\cos(y)$$

   En introduisant $\phi_y(t) = f\big((x,y)+t(0,1)\big)$ et en faisant le même développement, on obtient

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \phi'_y(0) = -e^x\sin(y)$$

Méthode 2 : calcul direct
On peut aussi faire le calcul directement, comme fait pendant vos cours de physique, à savoir :
La dérivée partielle de f par rapport à x, s'obtient en considérant que y est fixe et en dérivant l'expression par rapport à x.
La dérivée partielle de f par rapport à y, s'obtient en considérant que x est fixe et en dérivant l'expression par rapport à y.

Ainsi, en faisant le calcul de cette façon, on obtient directement

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = e^x \cos(y) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -e^x \sin(y)$$

2. Soit la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$. Alors en utilisant la deuxième méthode, on trouve directement

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2x\cos(xy) - y(x^2+y^2)\sin(xy) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy)$$

3. Soit la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$. Alors en utilisant la deuxième méthode, on trouve directement

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}$$

Exercice 2 : Calculs bêtes et méchants

Soit un gaz de molécules. Ce gaz, de volume V, de température T et soumis à la pression P, contient n moles.

1. On commence par décrire ce gaz par la loi des gaz parfait : $PV = nRT$ où R est la constance des gaz parfaits. Montrer alors que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = nR$$

2. Une meilleur approximation des gaz a été proposé à la fin du 19ième siècle par Van Der Waals

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT$$

où $a,\ b$ sont deux constantes positives. Calculer $\frac{\partial T}{\partial P}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.

Réponses :

1. Calculons séparément toutes les dérivées intervenant dans les expressions précédentes

$$\frac{\partial P}{\partial V} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} \qquad \frac{\partial T}{\partial P} \qquad \frac{\partial P}{\partial T}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{nRT}{V}\right) = -\frac{nRT}{V^2} \\
\frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{P}\right) = \frac{nR}{P} \\
\frac{\partial T}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{PV}{nR}\right) = \frac{V}{nR} \\
\frac{\partial P}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{V}\right) = \frac{nR}{V}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer les calculs

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{nRT}{V^2} \times \frac{nR}{P} \times \frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{PV} = -1$$

et

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = T \times \frac{nR}{V} \times \frac{nR}{P} = \frac{nRT \times nR}{PV} = nR$$

2. On considère maintenant l'équation de van der Waals dont on cherche à calculer

$$\frac{\partial T}{\partial P} \qquad \frac{\partial P}{\partial V}$$

alors

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{nR} \times \left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right) \times (V - nb)\right] = \frac{V - nb}{nR}$$

pour le second calcul, on doit manipuler un peu plus l'équation de van der Waals pour exprimer P en fonction des autres variables.

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}$$

finalement

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2a}{V^2}\right] = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2n^2a}{V^3}$$

Exercice 3 :

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sans se préoccuper de leur domaine de définition

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y) = \ln(xy)$
3. $f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$
6. $f(x,y) = \frac{4xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$
8. $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
9. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{3}}$
10. $f(x,y) = x^y$ (avec $x > 0$)
11. $f(x,y) = \cos\left(x+y^2\right)$
12. $f(x,y) = e^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$
13. $f(x,y) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$
14. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$
15. $f(x,y,z) = x^2yz^3 + xy - z$
16. $f(x,y,z) = x\sqrt{yz}$
17. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$
18. $f(x,y,z,t) = \frac{x-y}{z-t}$
19. $f(x,y,z,t) = xy^2z^3t^4$
20. $f(x,y) = y^5 - 3xy$
21. $f(x,y) = x^2 + 3xy - 6y^5$
22. $f(x,y) = x\cos\left(e^{xy}\right)$
23. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
24. $f(x,y) = x^y$
25. $f(x,y,z) = x\cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y+z))$

Réponses :

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6xy}{(x^2+y^2+1)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-3\left(x^2+y^2+1\right)-2y(-3y)}{(x^2+y^2++1)^2} = \frac{-3x^2+3y^2-3}{(x^2+y^2++1)^2}$

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$

5. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x-y)\cos(x)-(\sin(x)-\sin(y))}{(x-y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x-y)\cos(y)+\sin(x)-\sin(y)}{(x-y)^2}$

6. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(4y\left(x^2-y^2\right)+2x(4xy)\right)\left(x^2+y^2\right)-2x(4xy)\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^4y+16x^2y^3-4y^5}{(x^2+y^2)^2}$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(4x\left(x^2-y^2\right)-2y(4xy)\right)\left(x^2+y^2\right)-2y(4xy)\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^5-16x^3y^2-4y^4x}{(x^2+y^2)^2}$

7. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

8. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2\left(1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2\right)} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1-xy+x(x+y)}{(1-xy)^2\left(1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2\right)} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{2}{3}}$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{2}{3}}$

10. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)} = yx^{y-1}$
    $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)} = \ln(x)x^y$

11. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin\left(x+y^2\right)$
    $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\sin\left(x+y^2\right)$

12. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$
    $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$

13. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
    $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

14. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y}-x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}}\right)}{\left(\sqrt{x^2-y}\right)^2} = -\frac{y}{(x^2-y)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x\left(\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}\right)}{\left(\sqrt{x^2-y}\right)^2} = \frac{x}{2(x^2-y)^{\frac{3}{2}}}$

15. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz^3+y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2z^3+x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3x^2yz^2-1$

16. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\sqrt{yz}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x\sqrt{z}}{2\sqrt{y}}$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{x\sqrt{y}}{2\sqrt{z}}$

17. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{y}{xz}e^{\frac{y}{z}\ln(x)}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{1}{z}\ln(x)e^{\frac{y}{z}\ln(x)}$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\frac{y}{z^2}\ln(x)e^{\frac{y}{z}\ln(x)}$

18. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t)=\frac{1}{z-t}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t)=-\frac{1}{z-t}$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t)=-\frac{x-y}{(z-t)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t)=\frac{x-y}{(z-t)^2}$

19. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t)=y^2z^3t^4$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,t)=2xyz^3t^4$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t)=3xy^2z^2t^4$; $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t)=4xy^2z^3t^3$

20. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4-3x$

21. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x-30y^4$

22. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(e^{xy})-xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$

23. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}$

24. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x}x^y=yx^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(x)x^y$

25. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\cos(xz)-xz\sin(xz)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-x^2\sin(xz)-\frac{2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$

Exercice 4 :

Soient f et g deux fonctions d'une variable réele à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des fonctions de deux variables F_i suivantes, déterminer les dérivées partielles en fonction des dérivées f' et g'

1. $F_1(x,y)=f(x)+g(y)$
2. $F_2(x,y)=f(x)g(y)$
3. $F_3(x,y)=\frac{f(x)}{g(y)}$

Réponses :

1. Sans difficulté
$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{(x,y)}=f'(x) \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_{(x,y)}=g'(y)$$
2. Sans difficulté
$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{(x,y)}=f'(x)g(y) \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{(x,y)}=f(x)g'(y)$$
3. C'est simplement un peu plus technique
$$\left.\frac{\partial F_3}{\partial x}\right|_{(x,y)}=\frac{f'(x)}{g(y)} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial F_3}{\partial y}\right|_{(x,y)}=-\frac{f(x)g'(y)}{g^2(y)}$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Réponses :

1. Pour $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ la fonction est trivialement continue comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

   En $(0,0)$ la situation est très différente puisque le dénominateur s'annule. Compte tenu de la fonction, f ne peut être continue en $(0,0)$ si et seulement si

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

   ce qui est vrai si et seulement si

   $$|f(x,y) - 0| \underset{(x,y)\longrightarrow(x,y)}{\longrightarrow} 0$$

   Or

   $$|f(x,y) - 0| = \frac{|x| \times |y|}{|x| + |y|} \leq |x| \underset{(x,y)\longrightarrow(x,y)}{\longrightarrow} 0$$

   CQFD

2. Etudions maintenant les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$. Or dans ce cas, comme il y a une discontinuité dans la définition de f au point où l'on veut savoir si la fonction est dérivable ou non, nous sommes obligés de passer par la définition. Ainsi

   $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0) + t(1,0)\Big) - f(0,0)}{t}$$

   Or $f\big((0,0) + t(1,0)\big) = f(0,0) = 0$ et donc

   $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0) + t(1,0)\Big) - f(0,0)}{t} = 0$$

Etudions maintenant la dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à y.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0)+t(0,1)\Big) - f(0,0)}{t}$$

Or $f\big((0,0)+t(0,1)\big) = f(0,0) = 0$ et donc

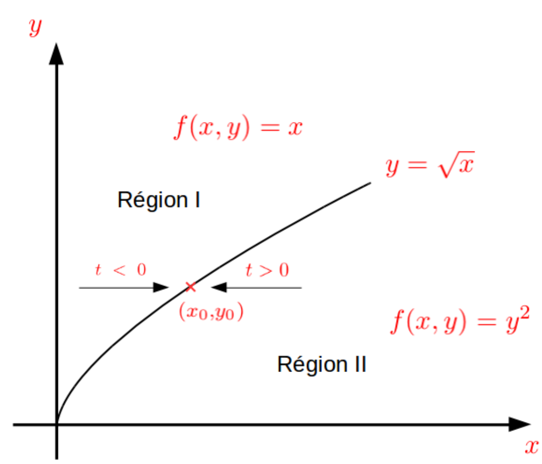
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((0,0)+t(0,1)\Big) - f(0,0)}{t} = 0$$

Exercice 6 :

Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \min(x, y^2)$ avec $x, y \geq 0$.

Réponse :
On a donc :
Si $x < y^2$ alors $f(x,y) = x$ (Région I)
Si $x > y^2$ alors $f(x,y) = y^2$ (Région II)
Si $x = y^2$ alors $f(x,y) = x = y^2$.

Ainsi l'interface entre les deux régions est la courbe d'équation $x = y^2$ c'est-à-dire $y = \sqrt{x}$ (puisque $x \geq 0$).



On a :
Région $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y^2$ et $x, y > 0\}$.
Région $II = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < y^2$ et $x, y > 0\}$.

Interface= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y^2 \text{ et } y \geq 0\}$.

Soit $(x,y) \in I$ alors $f(x,y) = x$ et on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\in I} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\in I} = 0$$

Soit $(x,y) \in II$ alors $f(x,y) = y^2$ et on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\in II} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\in II} = 2y$$

On doit maintenant se poser la question à l'interface, c'est-à-dire pour $y = \sqrt{x}$. Pour cela considérons un point (x_0, y_0) appartenant à l'interface, c'est-à-dire, tel que $x_0 > 0$ et $y_0 = \sqrt{x_0}$. Alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

donc pour $t < 0$, il faut prendre $f(x,y) = x$ tandis que pour $t > 0$, $f(x,y) = y^2$. Alors

Pour $t > 0$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y_0^2 - y_0^2}{t} = 0$$

Pour $t < 0$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{x_0 + t - x_0}{t} = 1$$

Ainsi la dérivée première selon x n'est pas définie sur la courbe $y = \sqrt{x} \neq 0$.

Il en va de même pour la dérivée première par rapport y.

Exercice 7 :

Etudier la continuité des fonctions suivantes ainsi que l'existence et la continuité de leurs dérivées partielles premières

1. $$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

2.

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

3.

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

Réponses :

1. Etudions f_1 :

   (a) Continuité de f_1 :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ la fonction est continue comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais. On doit maintenant étudier ce qu'il en est en $(0,0)$ puisque le dénominateur s'annule. Compte tenu de la fonction, f_1 ne peut être continue en $(0,0)$ si et seulement si

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

   Pour cela, passons en coordonnées polaires en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$. Alors

   $$\tilde{f}_1(\rho,\theta) = \Big(\cos(\theta) + \sin(\theta)\Big)^2$$

   Donc la valeur de $\tilde{f}_1$ dépend de θ et f_1 n'est pas continue en $(0,0)$.

   (b) Etudions maintenant les dérivées premières.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ alors

   $$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
   $$\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\frac{2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

   En $(0,0)$, nous devons utiliser la définition des dérivées partielles

   $$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{t^2}{t^2} - 0\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \pm\infty$$

   Donc la dérivée partielle selon x n'est pas continue en $(0,0)$. Je vous laisse faire le travaille pour la dérivée partielle selon y.

Finalement f_1 n'est continue sur $\mathbb{R}^2$ et évidemment pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Toutefois la fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$.

2. Etudions f_2 :

   (a) Continuité de f_2 :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ la fonction est continue. On doit maintenant étudier ce qu'il en est en $(0,0)$ puisque le dénominateur s'annule et qu'on a alors une forme indéterminée. Compte tenu de la fonction, f_2 ne peut être continue en $(0,0)$ si et seulement si

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$$

   Etudions donc $|f_2(x,y) - 0|$

   $$|f_2(x,y)| = |x^2+y^2| \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x^2+y^2| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   Donc f_2 est continue en $(0,0)$.

   Finalement f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Etudions maintenant les dérivées premières.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ alors

   $$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
   $$\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

   En $(0,0)$, nous devons utiliser la définition des dérivées partielles

   $$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(t,0) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[t^2 \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) - 0\right] = \lim_{t\to 0} t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) = 0$$

   On montre de la même façon que

   $$\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Ainsi, on a

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f_2}{\partial x} & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f_2}{\partial y} & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrons maintenant que ces deux applications ne sont pas continues.

Pour $\frac{\partial f_2}{\partial x}$:
Soit $u_n = (\frac{1}{n}, 0)$ alors u_n tend vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini.
Or
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(u_n)} = \frac{2}{n}\sin(n) - \cos(n)$$
qui n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Pour $\frac{\partial f_2}{\partial y}$:
Soit $u_n = (0, \frac{1}{n})$ alors u_n tend vers $(0,0)$ quand n tend vers l'infini.
Or
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(u_n)} = \frac{2}{n}\sin(n) - \cos(n)$$
qui n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Finalement f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais elle n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Par contre f_2 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$.

3. Etudions f_3 :

   (a) Continuité de f_3 :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ la fonction est continue car le dénominateur

ne s'annule jamais. On doit maintenant étudier ce qu'il en est en $(0,0)$ puisque le dénominateur s'annule et qu'on a alors une forme indéterminée. Compte tenu de la fonction, f_3 ne peut être continue en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 0$$

Pour étudier cela, nous allons effectuer un développement limité. Ainsi

$$\begin{aligned}
f_3(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2}\left[x\left(y-\frac{y^3}{6}+y^4\epsilon_1(y)\right)-y\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4\epsilon_2(x)\right)\right] \\
&= \frac{x^3y-xy^3+6xy^4\epsilon_1(y)-6yx^4\epsilon_2(x)}{6(x^2+y^2)} \\
&= \frac{xy}{6(x^2+y^2)}\Big(x^2-y^2+6y^3\epsilon_1(y)-6x^3\epsilon_2(x)\Big)
\end{aligned}$$

avec ϵ_1 qui tend vers 0 quand x tend vers 0 et ϵ_2 qui tend vers 0 quand y tend vers 0. Alors

$$\begin{aligned}
|f_3(x,y)| &= \frac{|xy|}{6(x^2+y^2)} \times \left|x^2-y^2+6y^3\epsilon_1(y)-6x^3\epsilon_2(x)\right| \\
&\leq \frac{x^2+y^2}{2\times 6(x^2+y^2)} \times \left|x^2-y^2+6y^3\epsilon_1(y)-6x^3\epsilon_2(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{12}\times\left(|x^2|+|y^2|+6|y^3\epsilon_1(y)|+6|x^3\epsilon_2(x)|\right) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc f_3 est continue en $(0,0)$ car on a aussi $f(0,0)=0$.

Finalement f_3 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Etudions maintenant les dérivées premières.
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ alors

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_3}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \frac{\sin(y)-y\cos(x)}{x^2+y^2} - \frac{2x\big(x\sin(y)-y\sin(x)\big)}{(x^2+y^2)^2} \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \frac{x\cos(y)-\sin(x)}{x^2+y^2} - \frac{2y\big(x\sin(y)-y\sin(x)\big)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

En $(0,0)$, nous devons utiliser la définition des dérivées partielles

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f_3(t,0)-f_3(0,0)}{t} = 0$$

On montre de la même façon que

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Ainsi, on a

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial f_3}{\partial x} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin(y)-y\cos(x)}{x^2+y^2} - \frac{2x\left(x\sin(y)-y\sin(x)\right)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial f_3}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x\cos(y)-\sin(x)}{x^2+y^2} - \frac{2y\left(x\sin(y)-y\sin(x)\right)}{(x^2+y^2)^2} \\ 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrons maintenant que $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ est une application continue. Pour cela, on va étudier séparément les deux termes qui composent l'expression de $\frac{\partial f_3}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(y)-y\cos(x)}{x^2+y^2} &= \frac{y - \frac{y^3}{6} + y^4\epsilon_1(y) - y\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon_2(x)\right)}{x^2+y^2} \\ &= y\left(\frac{-\frac{y^2}{6} + \frac{x^2}{2} + y^3\epsilon_1(y) + x^3\epsilon_2(x)}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\left|\frac{\sin(y)-y\cos(x)}{x^2+y^2}\right| \leq |y|\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + |y\epsilon_1(y)| + |x\epsilon_2(x)|\right) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

En faisant une étude similaire sur le 2nd terme, on obtient aussi que le second terme tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0. Donc finalement $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0. Finalement $\frac{\partial f_3}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Il en va de même pour $\frac{\partial f_3}{\partial y}$.

Finalement f_3 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 : Interprétation de la différentielle

Le but de cet exercice est de montrer le lien qui existe entre la différentielle d'une fonction et ses variations. Pour cela, nous allons introduire le calcul d'incertitude.

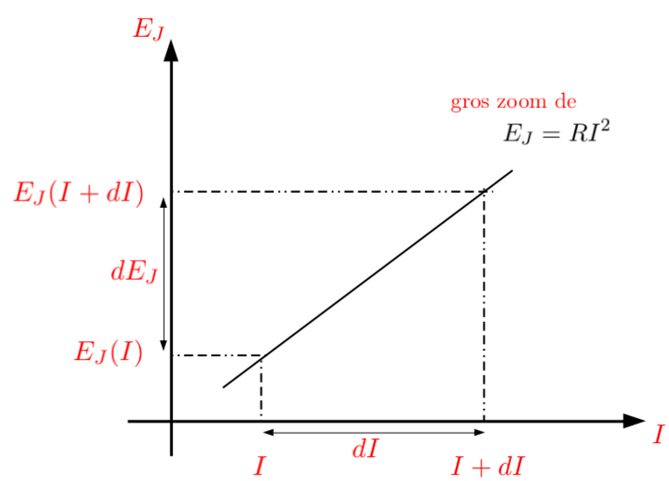
On considère une résistance R traversée par le courant électrique I. On sait que la puissance dissipée sous forme de chaleur E_J par cette résistance est donnée par

$$E_J = RI^2$$

1. Considérons tout d'abord que l'on connait parfaitement la résistance R mais que l'intensité n'est connue qu'à une incertitude près ΔI (où ΔI est considéré comme très petit devant I). Déterminer l'incertitude ΔE_J sur E_J. Relier cela à la différentielle d'une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On considère maintenant que l'on a également une incertitude ΔR sur la résistance en plus de l'incertitude ΔI sur l'intensité I. Déterminer l'incertitude sur E_J.

Réponses :

1. Considérons le schéma suivant



On cherche à exprimer

$$dE_J = E_J(I + dI) - E_J(I)$$

Or

$$E_J(I+dI) = R(I+dI)^2 = RI^2 + 2RIdI + RdI^2 \approx RI^2 + 2RIdI$$

L'approximation vient du fait que dI<<1 et donc $dI^2 \approx 0$. On obtient ainsi

$$dE_J \approx 2RIdI = E'_J(I)dI$$

où $E'_J(I)$ est la dérivée de E_J prise en I.

On voit donc que si on a une incertitude dI sur l'intensité I alors l'incertitude sur la puissance dissipée est donnée par

$$dE_J = 2RIdI = E'_J dI$$

2. On se pose maintenant la même question sauf que cette fois-ci, nous avons une incertitude à la fois sur R et sur I. On a alors

$$dE_J = dE_J^{(I)} + dE_J^{(R)}$$

où $dE_J^{(I)}$ et $dE_J^{(R)}$ sont respectivement l'incertitude sur E_J dû à l'incertitude sur I et à l'incertitude sur R. On a alors

$$dE_J^{(I)} = 2IRdI = \left.\frac{\partial E_J}{\partial I}\right|_{(I,R)} dI$$

et

$$dE_J^{(P)} = I^2 dR = \left.\frac{\partial E_J}{\partial R}\right|_{(I,R)} dR$$

Finalement on a

$$dE_J = \left.\frac{\partial E_J}{\partial R}\right|_{(I,R)} dR + \left.\frac{\partial E_J}{\partial I}\right|_{(I,R)} dI$$

On reconnait ici la différentielle vu en cours. Ce qui signifie que la différentielle au point (I,R) permet de connaître la variation de la fonction E_J lorsque la variable I devient $I+dI$ et la variable R devient $R+dR$.

Exercice 9 :

1. Soit a un réel non nul. Etudier la différentiabilité au point $(a,0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+|y|} \tag{10}$$

2. Discuter selon la valeur du réel α de la différentiabilité au point $(0,0)$ de
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{x^2+|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

Réponses :

1. f est différentiable en $(a,0)$ si et seulement si
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|_2}\left[f(a+h_1,h_2) - f(a,0) - h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,0)} - h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,0)}\right] = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,0)} = \left.\frac{2xy(x^2+|y|)-2x^3y}{(x^2+|y|)^2}\right|_{(a,0)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,0)} = \lim_{k\to 0}\left.\frac{f(a,k)-f(a,0)}{k}\right|_{(a,0)} = \lim_{k\to 0}\left.\frac{a^2k}{(a^2+|k|)k}\right|_{(a,0)} = 1 \text{ car } a \neq 0$$
alors
$$\epsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[\frac{(a+h_1)^2h_2}{(a+h_1)^2+|h_2|} - 0 - h_1\times 0 - h_2\times 1\right]$$
$$\epsilon(h_1,h_2) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left(\frac{h_2|h_2|}{(a+h_1)^2+|h_2|}\right)\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$
$$|\epsilon(h_1,h_2)| \leq \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{(a+h_1)^2+|h_2|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
Donc f est différentiable en $(a,0)$, et la différentielle est donnée par $D_{(a,0)}f(h_1,h_2) = h_2$.

2.

Si $\alpha \leq 0$ **:** alors $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^{\alpha+1}(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-\alpha}$. Donc si $\alpha = 0$, la suite tend vers 1 et si $\alpha < 0$, la suite tend vers $+\infty$. Dans les deux cas, la fonction est discontinue en $(0;0)$ et n'est donc pas différentiable en $(0;0)$.

Si $\alpha > 0$ **:**

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x|^\alpha |y|}{x^2+|y|} \leq \frac{|x|^\alpha |y|}{|y|} = |x|^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc f est continue en $(0;0)$. Regardons alors la différentiabilité.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc si f est différentiable en $(0;0)$, sa différentielle est nulle. Étudions la fonction

$$\varepsilon(h,k) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(f(h,k) - f(0,0) - 0\times h - 0\times k\right) = \left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

Si $\alpha > 1$ **:** Puisque $|f(h,k)| \leq |h|^\alpha$, nous avons

$$|\varepsilon(h,k)| \leq \frac{|h|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{|h|^\alpha}{|h|} = |h|^{\alpha-1}$$

Ainsi $\lim\limits_{(h;k)\to(0;0)} \varepsilon(h,k) = 0$ et f est différentiables en $(0;0)$ avec $\mathrm{d}f(0,0) = 0$.

Remarque 4.1. On peut aussi montrer que les dérivées partielles sont continues, donc la fonction de classe $\mathscr{C}^1$, donc f différentiable.

Si $0 < \alpha \leq 1$ **:** Nous avons cette fois

$$\varepsilon(h,h) = \frac{h^{\alpha+1}}{(h^2+|h|)\sqrt{2h^2}} = \frac{h^{\alpha+1}}{\sqrt{2}\,|h|^2\,(1+|h|)} = \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{2}(1+|h|)}$$

Ainsi

$$|\varepsilon(h,h)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|h|^{\alpha-1}\frac{h^2}{|h|\,(h^2+|h|)}$$

La limite de $|\varepsilon(h,h)|$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ si $\alpha = 1$ et $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$. Dans les deux cas, f n'est pas différentiable en $(0;0)$.

Exercice 10 :

Étudier la continuité et la différentiabilité puis calculer le gradient (lorsqu'il existe) des fonctions suivantes

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3+xy \end{array} \right.$

2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{array} \right.$

3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} U = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 < 1\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \ln(1-x^2-y^2) \end{array} \right.$

4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} U = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2 \geq 1\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array} \right.$

5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} \end{array} \right.$

6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \end{array} \right.$

7. $f_7 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$

8. $f_8 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ \cos(x) & \text{si} \quad x = y \end{array} \right. \end{array} \right.$

1. — La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
   —
   $$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2+y$$
   $$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x$$
   Les dérivées partielles étant continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et
   $$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+y \\ x \end{pmatrix}$$

2. — f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues.
   —
   $$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$
   $$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$
   Les dérivées partielles étant continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et
   $$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_2(x,y) = -2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. — f_3 est continue sur U comme composée de fonctions continues.
—
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2}$$
Les dérivées partielles étant continues sur U, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et
$$\overrightarrow{\text{grad}} f_3(x,y) = -\frac{2}{1-x^2-y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. — f_4 est continue sur U comme composée de fonctions continues.
—
$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{f_4(x,y)}$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{f_4(x,y)}$$
Les dérivées partielles étant continues sur $\mathring{U} = \left\{(x;y)\ /\ x^2+y^2 > 1\right\}$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{U}$, et
$$\overrightarrow{\text{grad}} f_4(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Étudions la fonction sur $Fr(U)$ $\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2 = 1\right\}$. Soit $(a;b)$ tel que $a^2+b^2 = 1$.
$$\frac{f_4(a+h,b)-f_4(a,b)}{h} = \frac{\sqrt{2ah+h^2}-0}{h}$$
Si $a = 0$ **:** $\frac{\partial f_4}{\partial x}(a,b) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} signe(h)$. La fonction admet donc une dérivée partielle à droite et à gauche mais celles-ci sont distinctes.

Si $a \neq 0$ **:** La fonction n'a pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(a;b)$.

De même pour la dérivée par rapport à y. En conclusion, f_4 n'est pas différentiable sur $Fr(U)$.

5. Soit $A(a;b)$ et $M(x;y)$. Nous avons $f_5(x,y) = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|_2$.
   — Quelque soit $a,b \in \mathbb{R}$, f_5 est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   — Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a;b)\}$. La fonction f_5 est de classe $\mathscr{C}^1$, donc différentiable, sur U.
      — Soit $(x;y) \neq (a;b)$
$$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = \frac{x-a}{f_5(x,y)}$$
$$\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) = \frac{y-b}{f_5(x,y)}$$
$$\overrightarrow{\text{grad}} f_5(x,y) = \frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|_2}$$
      — Soit $(x;y) = (a;b)$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_5(a+h,b)-f_5(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \pm 1$$
      Donc f_5 n'a pas de dérivées partielles en $(a;b)$ et f_5 n'est pas différentiable en $(a;b)$.

   La fonction f_5 est différentiable sur U.

6. Soit $a(0;1)$, $B(1;0)$ $M(x;y)$, $f_6(x,y) = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|_2 + \left\|\overrightarrow{BM}\right\|_2$

— La fonction f_6 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;1),(1;0)\}$

— Pour $(x;y) \in U$:

$$\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) = \frac{y-1}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

Les dérivées partielles étant continues sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;1),(1;0)\}$, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et donc différentiable en tout point de U.

$$\overrightarrow{\text{grad}} f_6(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_6}{x}(x,y) \\ \frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

— Pour $(x;y) = (0;1)$. $f_6(0,1) = \sqrt{2}$.

$$\frac{f_6(h,1)-f_6(0,1)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}+\sqrt{(h-1)^2+1}-\sqrt{2}}{h} = \frac{|h|}{h} + \frac{\sqrt{h^2-2h+2}-\sqrt{2}}{h}$$
$$= signe(h) + \frac{h-2}{\sqrt{h^2-2h+2}+\sqrt{2}}$$

Donc f_6 n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0;1)$ et n'est donc pas différentiable en $(0;1)$. Même chose en $(1;0)$.

7. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$

— La fonction f_7 est continue sur U comme quotient de fonctions continues donc le dénominateur ne s'annule pas.

$$|f_7(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) - f_7(0,0)| = \rho\left|\cos^3(\theta)-\sin^3(\theta)\right| \leq 2\rho \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

Donc f_7 est continue en $(0;0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

— — Pour $(x;y) \in U$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f_7}{\partial y}(x,y) = -\frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Les dérivées partielles étant continues sur U, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U donc différentiable sur U, et

$$\overrightarrow{\text{grad}} f_7(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_7}{x}(x,y) \\ \frac{\partial f_7}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

— Pour $(x;y) = (0;0)$

$$\frac{f_7(h,0)-f_7(0;0)}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1$$

Donc $\frac{\partial f_7}{\partial x}(0,0) = 1$

$$\frac{f_7(0,k)-f_7(0;0)}{k} = -1$$

Donc $\frac{\partial f_7}{\partial y}(0,0) = -1$.

Nous pouvons étudier la continuité des dérivées partielles en $(0;0)$, on montre alors qu'elles ne sont pas continues, donc f_7 n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0;0)$. Cela ne nous indique donc pas si elle est différentiable ou pas. Nous devons donc utiliser l'autre méthode : Si f_7 est différentiable en $(0;0)$ alors $\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = h-k$. Calculons

$$\begin{aligned}\varepsilon(h,k) &= \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(f_7(h,k)-f_7(0,0)-h-(-1)k\right)\\ &= \frac{hk(h-k)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Or $\varepsilon(h,-h) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0. Donc f_7 n'est pas différentiable en $(0;0)$.

8. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x;x) \ / x \in \mathbb{R}\}$.

— — La fonction f_8 est continue sur U.

— Soit $(x;y) = (a;a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) et (y_n) deux suites convergentes vers a. Alors

$$f_8(x_n;y_n) = \frac{2\cos\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\sin\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)}{x_n-y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(a) = f_8(a,a)$$

Ainsi f_8 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

— — Soit $(x;y) \in U$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_8}{\partial x}(x,y) &= \frac{\cos(x)}{x-y} - \frac{\sin(x)-\sin(y)}{(x-y)^2}\\ \frac{\partial f_8}{\partial y}(x,y) &= \frac{-\cos(y)}{x-y} + \frac{\sin(x)-\sin(y)}{(x-y)^2}\end{aligned}$$

Les dérivées partielles étant continues sur U, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_8(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_8}{x}(x,y)\\ \frac{\partial f_8}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

— Soit $(x;y) = (a;a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\frac{f_8(a+h,a)-f_8(a,a)}{h} &= \frac{\frac{\sin(a+h)}{h}-\cos(a)}{h}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-h\cos(a)}{h^2}\\ &= \sin(a)\left(\frac{\cos(h)-1}{h^2}\right)+\cos(a)\left(\frac{\sin(h)-h}{h^2}\right)\end{aligned}$$

La limite lorsque h tend vers 0 est donc $-\frac{1}{2}\sin(a)$ d'où $\frac{\partial f_8}{\partial x}(0,0) = -\frac{\sin(a)}{2}$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = -\frac{\sin(a)}{2}$.

$$\sin(a+h) = \sin(a)+h\cos(a)-\frac{h^2}{2}\sin(a)+o(h^2)\ \sin(a+k) \quad = \sin(a)+k\cos(a)-\frac{k^2}{2}\sin(a)+o(k^2)$$

D'où

$$f_8(a+h;a+k) = \frac{1}{h-k}\left((h-k)\cos(a)-\frac{h^2-k^2}{2}\sin(a)+o(h^2)+o(k^2)\right) = \cos(a)-\frac{h+k}{2}\sin(a)+o$$

Donc f_8 est différentiable en $(a;a)$ et

$$\mathrm{d}f(a;a)(h,k) = -\frac{\sin(a)}{2}(h+k)$$

TD9 – 10 :

Exercice 1 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1+t^2)$. Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Soit $f(x,y) = xy$ une fonction dépendant des variables x et y qui sont paramétrées par t :

$$x(t) = \cos(t) \qquad y(t) = \sin(t) \tag{12}$$

   Détemriner $g'(t)$ où $g(t) = f\Big(x(t), y(t)\Big)$ explicitement puis en utilisant la relation donnée dans la Prop D1 du cours.
3. Soit $(x_1, ..., x_n, h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose alors

$$g(t) = f(x_1 + th_1, ..., x_n + th_n) \tag{13}$$

   Calculer $g'(t)$

Réponses :

1. Introduisons les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{cases} u_1(t) = 2t \\ u_2(t) = 1 + t^2 \end{cases}$$

   qui sont clairement chacune $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors d'après le cours, la fonction $g = f \circ (u_1, u_2)$ est elle-même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\big(u_1(t), u_2(t)\big)} u_1'(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\big(u_1(t), u_2(t)\big)} u_2'(t) \\ &= 2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\big(2t, 1+t^2\big)} + 2t\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\big(2t, 1+t^2\big)} \end{aligned}$$

2. Posons les fonctions u_i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes

$$\begin{aligned}
&u_1(t) = x_1 + h_1 t \\
&u_2(t) = x_2 + h_2 t \\
&... \\
&u_n(t) = x_n + h_n t
\end{aligned}$$

qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g = f \circ (u_1, u_2, ..., u_n)$ est elle-même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\left(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\right)}$$

Exercice 2 :

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit la fonction g définie par

$$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv) \tag{14}$$

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles de g (par rapport à u et v) en fonction des dérivées partielles de f (par rapport à x et y).

Réponses :

1. Compte tenu de l'expression de g, on a $g = f \circ \phi$ où ϕ est la fonction définie par

$$\begin{array}{llll}
\phi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & & (u, v) & \mapsto & \Big(g_1(u, v), g_2(u, v)\Big) = (u^2 + v^2, uv)
\end{array}$$

La fonction ϕ est trivialement différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque les applications g_1 et g_2 sont trivialement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc, puisque f et ϕ sont différentiable sur $\mathbb{R}^2$, g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ par stabilité de la propriété de différentiabilité par composition.

2. On a donc
$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(g_1(u,v),g_2(u,v)\right)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{\left(u,v\right)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(g_1(u,v),g_2(u,v)\right)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{\left(u,v\right)}$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(g_1(u,v),g_2(u,v)\right)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial v}\right|_{\left(u,v\right)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(g_1(u,v),g_2(u,v)\right)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial v}\right|_{\left(u,v\right)}$$
alors
$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 2u \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(u^2+v^2,uv\right)} + v \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(u^2+v^2,uv\right)}$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} = 2v \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(u^2+v^2,uv\right)} + u \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(u^2+v^2,uv\right)}$$

Exercice 3 :

Soit $f \ : \ (x,y) \longrightarrow f(x,y)$ différentiable et $g \ : \ (\rho,\theta) \longrightarrow f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))$.

1. Justifier que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. En déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
4. Vérifier les résultats des deux questions précédentes sur la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$.

Réponses :

1. On a comme dans l'exercice précédent $g = f \circ \phi$ où ϕ est définie par
$$\begin{array}{rccl} \phi \ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho,\theta) & \mapsto & (x,y) = (\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) \end{array}$$
Or ϕ est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Par hypothèse, il en va de même pour f. Donc g est différentiable par stabilité de cette propriété par composition.

2. On a donc
$$\left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x,y\right)} \left.\frac{\partial x}{\partial \rho}\right|_{\left(\rho,\theta\right)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x,y\right)} \left.\frac{\partial y}{\partial \rho}\right|_{\left(\rho,\theta\right)}$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x,y\right)} \left.\frac{\partial x}{\partial \theta}\right|_{\left(\rho,\theta\right)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x,y\right)} \left.\frac{\partial y}{\partial \theta}\right|_{\left(\rho,\theta\right)}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} &= \cos(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \sin(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \\
\left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} &= -\rho\sin(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \rho\cos(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}
\end{aligned}$$

On peut alors remarquer

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{pmatrix}$$

3. Il suffit d'inverser la matrice précédente

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \rho\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} \end{pmatrix}$$

4. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$. On souhaite calculer les dérivées de g. On a alors 2 méthodes :

   <u>Méthode 1 :</u> méthode directe.
   on sait que $g(\rho,\theta) = \rho^2 + \rho\cos(\theta)$. Alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} = 2\rho + \cos(\theta) \\ \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} = -\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

   <u>Méthode 2 :</u> en utilisant les questions précédentes.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\theta)} = \cos(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \sin(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \cos(\theta)\big(2\rho\cos(\theta)+1\big) + \sin(\theta)\big(2\rho\sin(\theta)\big) \\
&= 2\rho + \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(\rho,\theta)} = -\rho\sin(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \rho\cos(\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\rho\sin(\theta)$$

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+t, y+t) = f(x, y) \tag{15}$$

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$$

Réponse :
Posons $g(t) = f(x+t, y+t) = f(u_1(t), u_2(t))$ où l'on a introduit les fonctions

$$\begin{cases} u_1(t) = x + t \\ u_2(t) = y + t \end{cases}$$

qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u_1'(t) = 1 = u_2'(t)$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(u_1(t),u_2(t)\right)} u_1'(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(u_1(t),u_2(t)\right)} u_2'(t) \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x+t,y+t\right)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x+t,y+t\right)} \end{aligned}$$

or dans notre cas $g'(t) = \frac{d}{dt} f(x, y) = 0$. Il suffit alors de prendre $t = 0$, conduisant donc à

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$$

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que pour $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(xt, yt) = f(x, y) \tag{16}$$

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 \tag{17}$$

Réponse :

Introduisons la fonction $g(t) = f(xt, yt) = f(u_1(t), u_2(t))$ où l'on a introduit les fonctions

$$\begin{cases} u_1(t) = xt \\ u_2(t) = yt \end{cases}$$

qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u_1'(t) = x$ et $u_2'(t) = y$. On a donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(u_1(t), u_2(t)\right)} u_1'(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(u_1(t), u_2(t)\right)} u_2'(t) \\ &= x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(xt, yt\right)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(xt, yt\right)} \end{aligned}$$

or dans notre cas $g'(t) = \frac{d}{dt} f(x, y) = 0$. Il suffit alors de prendre $t = 1$, conduisant donc à

$$x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$$

Exercice 6 :

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}; (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2})\right) \tag{18}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le jacobien de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Qu'en déduit-on pour f ?

Réponses :

1. Les applications composantes sont $\mathcal{C}^1$ comme produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (puisque $1 + x^2$ et $1 + y^2$ ne s'annulent jamais).

2. Calculons maintenant les dérivées premières en posant

   $$f_1(x, y) = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = (x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2})$$

   et

   $$\begin{cases} f_1(x, y) = xu(y) + yu(x) \\ f_2(x, y) = \big(x + u(x)\big)\big(y + u(y)\big) = xy + u(x)u(y) + f_1(x, y) \end{cases}$$

où u est l'application définie par $u(t)=\sqrt{t^2+1}$ conduisant à $u'(t)=\frac{t}{u(t)}$.

Alors pour f_1 :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x,y)} = u(y) + y\frac{x}{u(x)} = \frac{f_2(x,y)-f_1(x,y)}{u(x)} \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{xy}{u(y)} + u(x) = \frac{f_2(x,y)-f_1(x,y)}{u(y)} \end{cases}$$

tandis que pour f_2 :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(x,y)} = y + \frac{xu(y)}{u(x)} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{f_2(x,y)}{u(x)} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(x,y)} = x + \frac{u(x)y}{u(y)} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{f_2(x,y)}{u(y)} \end{cases}$$

on obtient donc

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x,y)} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x,y)} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(x,y)} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_2(x,y)-f_1(x,y)}{u(x)} & \frac{f_2(x,y)-f_1(x,y)}{u(y)} \\ \frac{f_2(x,y)}{u(x)} & \frac{f_2(x,y)}{u(y)} \end{pmatrix}$$

le jacobien (déterminant de la matrice précédente) est ainsi égal à 0. On déduit donc que f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 7 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout point, θ un réel et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \Big(x\cos(\theta) - y\sin(\theta)\ ;\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta)\Big) = \Big(u(x,y)\ ;\ v(x,y)\Big) \quad (19)$$

1. Montrer que la fonction $F = f \circ g$ admet des dérivées partielles en tout point.
2. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles de f.

Réponses :

1. $F = f \circ g$. Or f admet des dérivées partielles en tout point et de plus u et v sont clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc F admet des dérivées partielles en tout point.

2. Nous allons maintenant calculer les dérivées partielles de F en $(x = a, y = b)$ en fonction des dérivées partielles de f. Or on rappelle que

$$F = f \circ g \Longleftrightarrow F(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f \circ g(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

Donc les "variables naturelles" de F sont x et y tandis que celle de f sont u et v.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(a,b)} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(a,b)}$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(a,b)} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

où

$$\begin{cases} u(a, b) = a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ v(a, b) = a\sin(\theta) - b\cos(\theta) \end{cases}$$

Finalement

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \cos(\theta) + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \sin(\theta)$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(a,b)} = -\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \sin(\theta) + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u(a,b),v(a,b))} \cos(\theta)$$

Exercice 8 :

On cherche toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, telles que

$$(E) \ : \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + 2x \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 \qquad (20)$$

On considère l'application φ qui associe à $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ $\varphi(u, v) = (u, v + u^2)$.

1. Montrer que φ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Que peut-on en déduire pour φ ?
4. On introduit maintenant la fonction définie par $g = f \circ \varphi$
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0 \tag{21}$$

5. En déduire que $f(x,y) = h(y - x^2)$, où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est solution de (E).

Réponses :

1. Clairement φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrons maintenant que φ est bijective. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v + u^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y - x^2 \end{cases}$$

Donc φ est bijective.

2. Compte tenu de l'expression trouvée à la question précédente, on voit clairement que φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. On déduit donc que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

4. (a) On rappelle que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et de plus par hypothèse f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc par stabilité de la propriété $\mathcal{C}^1$ par composition, $g = f \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculons les dérivées partielles de g qui a pour variable u et v. Alors

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)}$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)}$$

Nous n'allons considérer que la première dérivée

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} + 2u \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)}$$

or, puisque $x = u$, on a

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(u,v),y(u,v))} + 2x \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x(u,v),y(u,v))}$$

On voit donc que

$$\text{solution de } (E) \Longrightarrow \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0$$

5. D'après la question précédente f vérifie (E) si et seulement $g = f \circ \varphi$ vérifie $\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0$. Or $\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0 \Longleftrightarrow g(u,v) = h(v)$ où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$f(x,y) = (g \circ \varphi^{-1})(x,y) = g(x, y - x^2) = h(y - x^2)$$

Exercice 9 :

Résoudre les équations aux dérivées partielles du premier ordre suivantes d'inconnue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ à l'aide du changement de variables fourni

1. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; changement de variables : $(u,v) = (x, y/x)$.
2. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^4 + y^4}$; changement de variables : $(u,v) = (y/x, x^2 + y^2)$.
3. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$; changement de variables : $(u,v) = (x, yx)$.
4. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = af$; $a \in \mathbb{R}$; changement de variables : coordonnées polaires.

Réponses :

1. On pose $\varphi(x,y) = \left(x; \frac{y}{x}\right)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus si $(u;v) \in U$, alors $(u;v) = \left(x; \frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow (x;y) = (u;uv)$. Donc φ est bijective sur U et φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Donc φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U dans U.
Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U à valeur dans U. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f = g \circ \varphi$. La fonction g est aussi

de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans U comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times 1 + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times \frac{-y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times \frac{1}{x} \end{cases}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si $\forall (x;y) \in U$

$$x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) + \frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0 = u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$$

D'où $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$, ainsi $g(u,v) = h(v)$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. Soit $\varphi(x,y) = \left(\frac{y}{x}; x^2+y^2\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* = V$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus si $(u;v) \in V$,

$$\left(\frac{y}{x}; x^2+y^2\right) = (u;v) \Leftrightarrow (x;y) = \left(\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}; u\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}\right)$$

La fonction φ est donc bijective de U dans V avec φ^{-1} de classe $\mathscr{C}^1$ sur V. Donc φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.
Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times (2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times (2y) \end{cases}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si $\forall (x;y) \in U$

$$2(x^2+y^2)\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \sqrt{x^4+y^4} = x^2\sqrt{1+u^4}$$

D'où $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\sqrt{1+u^4}}{2(1+u^2)}$, ainsi $g(u,v) = v\frac{\sqrt{1+u^4}}{2(1+u^2)} + h(u)$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+y^4} + h\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. On pose $\varphi(x,y) = (x;yx)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus si $(u;v) \in U$, alors $(u;v) = (x;yx) \Leftrightarrow (x;y) = \left(u;\frac{v}{u}\right)$. Donc φ est bijective sur U et φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Donc φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U dans U.
Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U à valeur dans U. On pose $g = f \circ \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f = g \circ \varphi$. La fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans U comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times 1 + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \times 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \times x \end{cases}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si $\forall (x;y) \in U$

$$x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = xy^2$$

D'où $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = y^2 = \frac{v^2}{u^2}$, ainsi $g(u,v) = -\frac{v^2}{u} + h(v)$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$f(x,y) = g(x,xy) = -xy^2 + h(yx)$$

4. On pose $\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta);\rho\sin(\theta)) = (x;y)$. Nous avons vu que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $V = \varphi^{-1}(U) = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans U. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur U à valeur dans U. On pose $g = f\circ\varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f = g\circ\varphi$. La fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans U comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors :

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\times\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\times\sin(\theta)$$

D'où

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) &= \rho\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &= x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si $\forall(\rho;\theta)\in U$

$$\rho\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = ag(\rho,\theta)$$

D'où $g(\rho,\theta) = \rho^a h(\theta)$.
Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2},\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^a h\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^2$, alors f est différentiable en tout point.
2. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ existe en tout point.
3. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ alors f est continue.
4. Si f est différentiable en tout points, alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ existe en tout point, alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
6. Si f est continue alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.
7. Si f est différentiable en $(x_0;y_0)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0,y_0)$ existe.
8. Si f est différentiable alors f est continue.
9. Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0,y_0)$ existe, alors f est différentiable en $(x_0;y_0)$.
10. Si f est continue alors f est différentiable.
11. Si f est continue alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ existe en tout point.
12. Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ existe en tout point alors f est continue.

Réponses :

1. vrai	4. faux	7. vrai	10. faux
2. vrai	5. faux	8. vrai	11. faux
3. vrai	6. faux	9. faux	12. faux

Exercice 11 :

On cherche toutes les fonctions de g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, $\forall(x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x,y)} = a$$

où a est un réel.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. En utilisant le théorème de composition, montrer que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \frac{a}{2}$$

2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Réponses :

1. Cela revient à avoir posé le changement de variables suivant

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (u,v) & \mapsto & (x,y) = \varphi(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \end{array}$$

clairement φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

or on peut facilement inverser cette matrice, ce qui conduit à

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a donc $u = x - y$ et $v = x + y$. Ainsi φ est bijectif et de plus φ^{-1} est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il s'agit donc d'un changement de variable légal. On a

$$\begin{cases} g = f \circ \varphi^{-1} \iff g(x,y) = \big(f \circ \varphi^{-1}\big)(x,y) = f\big(\varphi^{-1}(x,y)\big) \\ f = g \circ \varphi \qquad \iff f(u,v) = \big(g \circ \varphi\big)(x,y) = g\big(\varphi(u,v)\big) \end{cases}$$

On peut alors calculer la dérivée partielle de f par rapport à u

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u,v)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\left(x(u,v),y(u,v)\right)} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

2. On peut maintenant intégrer cette équation

$$f(u,v) = \frac{a}{2}u + h(v)$$

avec h qui est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. On peut facilement obtenir g puisque $g = f \circ \varphi^{-1}$ où $\varphi^{-1}(x,y) = (x-y, x+y)$. On a alors

$$g(x,y) = f(x-y, x+y) = \frac{a}{2}(x-y) + h(x+y)$$

Exercice 12 :

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$
Indication : On utilisera le changement de variables $u = x + y$ et $v = x + 2y$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$
Indication : On passera en coordonnées polaires.

Réponses :

1. On nous propose le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

Introduisons donc la fonction changement de variables φ suivante

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = \Big(x+y, x+2y\Big) \end{array}$$

On peut alors introduire la fonction g qui est telle que

$$f = g \circ \varphi \Longleftrightarrow f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g(\varphi(x,y)) = g(x+y, x+2y)$$

Je vous laisse vérifier que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire que c'est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et telle que φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{array}{rcl} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\big(x,y\big)} & = & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\big(x,y\big)} + \left.\dfrac{\partial g}{\partial v}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{\big(x,y\big)} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\big(x,y\big)} & = & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\big(x,y\big)} + \left.\dfrac{\partial g}{\partial v}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{\big(x,y\big)} \end{array}$$

ce qui conduit à

$$\begin{array}{rcl} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\big(x,y\big)} & = & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} + \left.\dfrac{\partial g}{\partial v}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\big(x,y\big)} & = & \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} + 2\left.\dfrac{\partial g}{\partial v}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)} \end{array}$$

alors

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)}$$

d'où l'on déduit que

$$0 = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\big(u(x,y),v(x,y)\big)}$$

puisque

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0$$

On peut maintenant résoudre l'équation aux dérivées partielles sur g d'où l'on tire

$$g(u,v) = h(v)$$

où h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Or $f = g \circ \varphi$ c'est-à-dire

$$f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big) = g\big(x+y, x+2y\big)$$

finalement, on déduit que

$$f(x,y) = h(x+2y)$$

où h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ quelconque.

2. On introduit la fonction changement de variable suivante

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & U = \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ & & (r,\theta) & \mapsto & (x,y) = \varphi(r,\theta) = \Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \end{array}$$

φ est clairement $\mathcal{C}^1$ sur U dans V. Montrons maintenant que φ est bijective. Pour cela, rappelons que l'on a

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

or $x^2 + y^2 = r^2$ or puisque $r > 0$:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Longleftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De plus comme $x \neq 0$, on peut calculer y/x d'où l'on obtient

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

or comme $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut écrire

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta) \Longleftrightarrow \theta = Arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ainsi

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = Arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

où $(x,y) \in U$ et $(r,\theta) \in V$ et il s'agit bien d'une bijection.

Vérifions maintenant que φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour cela, calculons les différentes dérivées partielles

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\theta)$$
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta)$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = Arctan'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = Arctan'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

Toutes les dérivées premières sont bien définies $\forall (x,y) \in V$ et donc φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^1$ sur V.

Finalement φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V.

Utilisons maintenant ce changement de variable afin de déterminer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} \left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)} \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{(x,y)}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)} \left.\frac{\partial \theta}{\partial y}\right|_{(x,y)}$$

Ce qui donne, compte-tenu des expressions des dérivées partielles

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \cos(\theta) \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} - \frac{\sin(\theta)}{r} \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \sin(\theta) \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{r} \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)}$$

on peut maintenant calculer $x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}$ en utilisant les relations précédentes

$$r = x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + y \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = r \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)}$$

on déduit donc puisque $r \neq 0$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} = 1$$

cette équation peut facilement s'intégrer pour obtenir

$$g(r,\theta) = r + h(\theta)$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Or

$$g = f \circ \varphi \Longleftrightarrow g(\rho,\theta) = (f \circ \varphi)(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

c'est-à-dire

$$f = g \circ \varphi^{-1} \Longleftrightarrow f(x,y) = (g \circ \varphi^{-1})(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}, Arctan(y/x)\right)$$

et finalement la solution de l'EDP est donnée par

$$\forall (x,y) \in V,\ \ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + h\left(Arctan(y/x)\right)$$

où h est une application $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 13 :

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ les équations aux dérivées partielles suivantes

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ avec $(u;v) = (2x+y;3x+y)$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f$ avec $(u;v) = (x;y-x)$.
3. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$, en coordonnées polaires.
4. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, en coordonnées polaires.
5. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, en coordonnées polaires.

Réponses :

1. On nous propose le changement de variables suivant

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = (2x+y, 3x+y) \end{array}$$

Je vous laisse vérifier que cette application est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. on a alors

$$f = g\circ\varphi \Longleftrightarrow f(x,y) = (g\circ\varphi)(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g(u,v) = g(2x+y, 3x+y) \tag{22}$$

On peut alors exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)}
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= 2\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} + 3\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - 3\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 \Longleftrightarrow \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = 0$$

Cette dernière EDP est facilement intégrable et conduit à

$$g(u,v) = h(v)$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Or, d'après (23), on a

$$f(x,y) = h(3x+y)$$

Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, la solution à l'EDP donnée est

$$f(x,y) = h(3x+y)$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On nous propose le changement de variables suivant

$$\begin{array}{rccl}
\varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\
& (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = (x, y-x)
\end{array}$$

Je vous laisse vérifier que cette application est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. on a alors

$$f = g \circ \varphi \Longleftrightarrow f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g(u,v) = g(2x+y, 3x+y) \tag{23}$$

On peut alors exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)}
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} - \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} &= \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = f(x,y) \Longleftrightarrow \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = g(u,v)$$

Cette dernière équation est équivalente à une équation différentielle qui a pour solution

$$g(u,v) = C(v)e^u$$

où C est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Or, d'après (23), on a

$$f(x,y) = C(y-x)e^x$$

Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, la solution à l'EDP donnée est

$$f(x,y) = C(y-x)e^x$$

où h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

TD11 – 12 :

Exercice 1 :

Déterminer les fonctions f solutions des systèmes suivants

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y \end{cases} \tag{24}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{25}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \tag{26}$$

Réponses :

1. Résolution du système d'EDP :

   Etape 1 : vérifions que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(yx^2) = 2xy \\ \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy \end{cases}$$

   ainsi, on sait qu'il existe bien une solution à ce système d'EDP.

   Etape 2 : intégration de l'une des deux équations. Ici on va intégrer $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2$. Alors
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + K(y)$$
   où K est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   Etape 3 : dérivation par l'autre variable de la solution précédente.
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + K(y)\right) = x^2y + \frac{\partial K(y)}{\partial y}$$

or, on sait, compte tenu de la deuxième EDP du système d'EDPs, $\frac{\partial f}{\partial y} = yx^2$, d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + K(y)\right) = x^2y + \frac{\partial K(y)}{\partial y} = x^2y$$

donc, on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial K(y)}{\partial y} = 0$$

Etape 4 : intégration de l'équation différentielle précédente

$$K(y) = C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Etape 5 : écriture de la solution.
La solution est donc donnée par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2. Résolution du système d'EDP :

Etape 1 : vérifions que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

ainsi, on sait qu'il existe bien une solution à ce système d'EDP.

Etape 2 : intégration de l'une des deux équations. Ici on va intégrer $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Alors

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + K(y)$$

où K est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Etape 3 : dérivation par l'autre variable de la solution précédente.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2} + K(y)\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial K(y)}{\partial y}$$

or, on sait, compte tenu de la deuxième EDP du système d'EDPs, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2} + K(y)\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial K(y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donc, on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial K(y)}{\partial y} = 0$$

Etape 4 : intégration de l'équation différentielle précédente

$$K(y) = C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Etape 5 : écriture de la solution.
La solution est donc donnée par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3. Résolution du système d'EDP :

   Etape 1 : vérifions si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

   ainsi, il n'existe pas de solution $\mathcal{C}^2$ à ce système d'EDP.

Exercice 2 :

Pour toutes les fonctions suivantes, calculer l'expression de toutes les dérivées secondes en précisant les domaines d'existance

1. $f(x,y) = x^2 y + x\sqrt{y}$
2. $f(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x-y)$
3. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$

4. $f(x,y) = \cos^2(5x+2y)$
5. $f(x,y) = x^2(x+y)$
6. $f(x,y) = \cos(xy)$

Réponses :

1. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2xy + \sqrt{y} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = x^2 + \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 2y \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = -\frac{x}{4y^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \cos(x+y) - \sin(x-y) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \cos(x+y) + \sin(x-y) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = -\sin(x+y) - \cos(x-y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = -\sin(x+y) + \cos(x-y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = -\sin(x+y) + \cos(x-y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = -\sin(x+y) - \cos(x-y) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 3x\sqrt{x^2+y^2} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 3y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 3\sqrt{x^2+y^2} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{3xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{3xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = 3\sqrt{x^2+y^2} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

4. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = -10\sin(5x+2y)\cos(5x+2) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -4\sin(5x+2y)\cos(5x+2y) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = -50\cos^2(5x+2y) + 50\sin^2(5x+2y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = -20\cos(5x+2y) + 20\sin(5x+2y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = -20\cos(5x+2y) + 20\sin(5x+2y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = -8\cos^2(5x+2y) + 8\sin^2(5x+2y) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

5. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x(x+y) + x^2 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = x^2 \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 6x + 2y \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = 2x \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = 2x \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = 0 \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

6. Pour les dérivées 1ères :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = -y\sin(xy) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -x\sin(xy) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = -y^2\cos(xy) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = -x^2\cos(xy) \end{cases}$$

elles sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :

Pour chaque fonction déterminer la dérivée partielle indiquée

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$: $f(x,y) = x^2y^4 + 2x^4y$
2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$: $f(x,y) = e^{xy^2}$
3. $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$: $f(x,y,z) = x^5 + 4x^4y^4z^3 + yz^2$
4. $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$: $f(x,y,z) = e^{xyz}$
5. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$: $u(x,y,z) = \ln(x + 2y^2 + 3z^2)$

Réponses :

1.
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2xy^4+8x^3y \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 2y^4+24x^2y \quad ; \quad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(x,y)} = 48xy$$

2.
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2yxe^{xy^2} \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = 2ye^{xy^2} + 2y^3xe^{xy^2}$$
$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(x,y)} = 4y^3e^{xy^2} + 2y^5xe^{xy^2}$$

3.
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 5x^4 + 16x^3y^4z^3 \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = 64x^3y^3z^3$$
$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = 192x^3y^3z^2$$

4.
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = xze^{xyz} \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right|_{(x,y)} = (x + x^2yz)e^{xyz}$$
$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}\right|_{(x,y)} = x^2z(2 + xyz)e^{xyz}$$

5.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x,y)} = \frac{6z}{x+2y^2+3z^2} \quad ; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{(x,y)} = -\frac{24yz}{(x+2y^2+3z^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{(x,y)} = \frac{48yz}{(x+2y^2+3z^2)^3}$$

Exercice 4 :

Vérifier le théorème de Schwarz sur les fonctions suivantes

1. $f(x, y) = x^5y^4 - 3x^2y^3 + 2x^2$
2. $f(x, y) = \sin^2(x)\cos(y)$

Réponses :

1.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 5x^4y^4 - 6xy^3 + 4x \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 4x^5y^3 - 9x^2y^2 \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = 20x^4y^3 - 18xy^2 \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = 20x^4y^3 - 18xy^2 \end{cases}$$

On a donc bien $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)}$.

2.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2\sin(x)\cos(x)\cos(y) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\sin^2(x)\sin(y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = -2\sin(x)\cos(x)\sin(y) \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)} = -2\sin(x)\cos(x)\sin(y) \end{cases}$$

On a donc bien $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)}$.

Exercice 5 :

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On définit le laplacien de f comme étant l'application définie sur U par

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{27}$$

Déterminer le laplacien de chacune des fonctions suivantes

1. $U = \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 - y^2$
2. $U = \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$
4. $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Réponses :

1.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 2$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -2y \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = -2$$

ainsi $\Delta f = 0$

2.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = 2$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2y \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = 2$$

ainsi $\Delta f = 4$

3.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ainsi $\Delta f = 0$

4.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

ainsi $\Delta f = 0$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{28}$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas même valeur.
3. Que peut-on en déduire ?

Réponses :

1. Pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, il faut et il suffit que les dérivées premières soient continues sur $\mathbb{R}^2$.

   Sur $(x,y) \neq (0,0)$:
   Les dérivées premières sont données par

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{3y^2x(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

   Les dérivées sont clairement continues $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Sur $(x, y) = (0, 0)$:
On calcule ici les dérivées premières en $(0, 0)$ en utilisant la définition

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Résumé
Ainsi, les applications dérivées premières sont données par

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f}{\partial x} & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f}{\partial y} & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Continuité :
Il faut maintenant vérifier que ces deux applications sont bien continues en $(0, 0)$ (car elles le sont clairement en dehors).

Commençons par $\frac{\partial f}{\partial x}$. Pour cela, passons en coordonnées polaires en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$:

$$\frac{\tilde{\partial f}}{\partial x} = \rho \sin^3(\theta)\big(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)\big) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ainsi, on a bien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}2$. De la même façon, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Finalement, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Etudions maintenant les dérivées secondes croisées en $(0, 0)$. Alors

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t,0)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right] = 0$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,t)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \times \frac{t^5}{t^4} = 1$$

3. Donc, les dérivées secondes croisées ne sont pas égales en $(0,0)$, ce qui implique que soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, soit $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, soit les deux, ne sont pas continues en $(0,0)$ et donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{29}$$

   (a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$

   (b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ et ont même valeur.

   (c) Que peut-on en déduire ?

2. Mêmes questions pour

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{30}$$

Réponses :

1. (a) Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, nous allons montrer que les dérivées premières sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

   Etude des dérivées sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

   Clairement, ses dérivées premières sont continues pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Etude des dérivées en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^3 = 0$$

Résumé

Ainsi, les applications dérivées premières sont données par

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x} & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial y} & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}$$

Continuité :

Il faut maintenant vérifier que ces deux applications sont bien continues en $(0,0)$ (car elles le sont clairement en dehors). Pour cela, passons en coordonnées polaires en posant $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$:

$$\frac{\tilde{\partial f}}{\partial x} = -2\rho\cos(\theta)\sin^4(\theta) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ainsi, on a bien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De la même façon, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Finalement, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons maintenant que les dérivées secondes croisées ont bien même valeur en $(0,0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(t,0)} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}\right] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,t)} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}\right] = 0$$

Les dérivées croisées ont donc bien même valeur en $(0,0)$. Toutefois, cela ne permet pas de conclure qu'elles sont continues en $(0,0)$.

(c) On ne peut pas conclure que les dérivées secondes croisées sont continues. Pour voir cela, calculons tout d'abord la dérivées seconde croisée pour $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial y\partial x}\Big|_{(x,y)\neq(0,0)} = -\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

ainsi

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f}{\partial y} & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x\partial y} = \begin{cases} -\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}$$

or

$$\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,x)} = -\frac{8x^6}{(2x^2)^3} = 1 \neq 0$$

ainsi la dérivée seconde croisée n'est pas continue en $(0,0)$ et donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. laissée en exercice.

Exercice 8 :

Déterminer la classe exacte des applications suivantes

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{31}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+(y-x^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{32}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{x^2}-1)(e^{y^2}-1)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{33}$$

Réponses :

1. Etudions la 1ère fonction. Soit $U_1 = \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_1 car fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Mais évidemment, il va falloir étudier les choses en $(0,0)$.

   Continuité en $(0,0)$:
   Etudions $|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)|$. Si cette quantité tend vers 0 alors
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$
   et la fonction sera continue. Alors
   $$\begin{aligned} |f(x,y)| = \left|\frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2}x^2 + 2x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}y^2 \\ &\leq x^2 + 2y^2 + y^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$
   donc f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

   Etude des dérivées premières :(Régardons si f est $\mathcal{C}^1$).
   Commencons par calculer les dérivées partielles sur U_1
   $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{4x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^2-y^2)(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
   $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{2y^5+4x^2y^3-6x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y(x^2-y^2)(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
   Les dérivées partielles premières sont clairement continues sur U_1. Mais il faut aussi étudier les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

Dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \times \frac{t^4}{t^2} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t = 0$$

On déduit donc que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Il faut donc maintenant étudier la continuité des fonctions dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2x(x^2-y^2)(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{-2y(x^2-y^2)(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

dans les deux cas, on peut passer en coordonnées polaires en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$ pour étudier la continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2\rho\cos(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)\left(\cos^2(\theta)+3\sin^2(\theta)\right) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$
$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -2\rho\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)\left(3\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Finalement

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

Donc les dérivées partielles premières sont continues en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Etudions maintenant les dérivées secondes :
Pour cela, calculons les dérivées partielles croisées. Pour $(x,y) \in U_1$, on a

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)\in U_1} = \left.\frac{\partial f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{8xy(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{8xy}{x^2+y^2}$$

Faisons maintenant l'étude en $(0,0)$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t,0)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right] = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,t)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\right] = 0$$

Ainsi, la fonction dérivée partielle seconde croisée est donnée par

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{8xy(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{8xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Or

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,x)} = -4 \underset{(x,x)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \neq \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(0,0)}$$

Donc la fonction dérivée partielle seconde croisée n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ et finalement f n'est pas $\mathcal{C}^2$.

2. Etudions la 2ème fonction. Soit $U_1 = \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_1 car fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Mais évidemment, il va falloir étudier les choses en $(0,0)$.

   Continuité en $(0,0)$:
   Pour cela, commençons par modifier l'expression de f

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+(y-x^2)^2} = \frac{xy^2}{x^2+y^2+x^4-2yx^2}$$

Passons maintenant en coordonnées polaires en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{\rho^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2 + (\rho\cos(\theta))^4 - 2\rho^3\sin(\theta)\cos^2(\theta)} = \frac{\rho\cos(\theta)\sin(\theta)}{1 + \rho\left(\rho\cos^4(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right)}$$

or clairement, puisque $\forall\theta,\ \rho\left(\rho\cos^4(\theta) - 2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\forall\theta,\ \tilde{f}(x,y) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et finalement

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

et donc f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Etude des dérivées premières :(Régardons si f est $\mathcal{C}^1$).
Commencons par calculer les dérivées partielles sur U_1

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{y^2}{x^2 + (y-x^2)^2} - \frac{xy^2\left(2x - 4x(y-x^2)\right)}{\left(x^2 + (y-x^2)^2\right)^2}$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{2xy}{x^2 + (y-x^2)^2} - \frac{2xy^2\left(y-x^2\right)}{\left(x^2 + (y-x^2)^2\right)^2}$$

Les dérivées partielles premières sont clairement continues sur U_1. Mais il faut aussi étudier les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

Dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\times\frac{t^4}{t^2} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t = 0$$

On déduit donc que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Il faut donc maintenant étudier la continuité des fonctions dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+(y-x^2)^2} - \frac{xy^2\left(2x-4x(y-x^2)\right)}{(x^2+(y-x^2)^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+(y-x^2)^2} - \frac{2xy^2\left(y-x^2\right)}{(x^2+(y-x^2)^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Or, on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)} = 1 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$

Donc la dérivée partielle première par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$ et donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Etudions la dernière fonction. Soit $U_1 = \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U_1 car fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Mais évidemment, il va falloir étudier les choses en $(0,0)$.

   Continuité en $(0,0)$:
   Alors

$$f(x,y) = \frac{(e^{x^2}-1)(e^{y^2}-1)}{x^2+y^2} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\frac{e^{y^2}-1}{y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   donc f est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

   Etude des dérivées premières :(Régardons si f est $\mathcal{C}^1$).
   Commencons par calculer les dérivées partielles sur U_1

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{2xe^{x^2}\left(e^{y^2}-1\right)}{x^2+y^2} - \frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)\left(e^{y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\in U_1} = \frac{2ye^{y^2}\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2+y^2} - \frac{2y\left(e^{x^2}-1\right)\left(e^{y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

Les dérivées partielles premières sont clairement continues sur U_1. Mais il faut aussi étudier les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

Dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

On déduit donc que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$$

Il faut donc maintenant étudier la continuité des fonctions dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2xe^{x^2}\left(e^{y^2}-1\right)}{x^2+y^2} - \frac{2x\left(e^{x^2}-1\right)\left(e^{y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2ye^{y^2}\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2+y^2} - \frac{2y\left(e^{x^2}-1\right)\left(e^{y^2}-1\right)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Etudions la continuité de la dérivée partielle première par rapport à x en $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} \right| &\leq 2|x| \frac{e^{x^2}\left|e^{y^2}-1\right|}{x^2+y^2} + 2|x| \frac{\left|e^{x^2}-1\right| \times \left|e^{y^2}-1\right|}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq 2\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} e^{x^2} \frac{\left|e^{y^2}-1\right|}{y^2} + 2\frac{|x^3y^2|}{(x^2+y^2)^2} \frac{\left|e^{x^2}-1\right|}{x^2} \frac{\left|e^{y^2}-1\right|}{y^2} \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Il en va de même pour la dérivée première par rapport à y.
Finalement

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

Donc les dérivées partielles premières sont continues en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Etudions maintenant les dérivées secondes :</u>
Pour cela, calculons les dérivées partielles croisées. Pour $(x,y) \in U_1$, on a

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)\in U_1} &= \frac{4xy}{x^2+y^2}\left(e^{x^2+y^2} - \frac{(e^{x^2}-1)e^{y^2}}{x^2+y^2} - \frac{(e^{y^2}-1)e^{x^2}}{x^2+y^2} + 2\frac{(e^{x^2}-1)(e^{y^2}-1)}{(x^2+y^2)^2}\right)\\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial y \partial x}\right|_{(x,y)\in U_1}\end{aligned}$$

Or, on a

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,x)} = 2\left(e^{2x^2} - \frac{e^{x^2}\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,y)} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc la fonction dérivée partielle seconde croisée n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ et finalement f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 :

Résoudre les EDP du second d'ordre d'inconnue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à l'aide du changement de variables fourni

1. $U = \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; $(u,v) = (x+y, x-y)$
2. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; $(u,v) = (x, y/x)$
3. $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$: $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $(u,v) = (xy, y/x)$

4. $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=0\,;\,(u,v)=(\ln(x),\ln(y))$
5. $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}=0\,;\,(u,v)=(x^2-y,x^2+y)$
6. $U=\mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,;\,(u,v)=(x,x+y)$
7. $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,;\,(u,v)=(xy,x/y)$

Réponses :

1. Résolution de l'EDP
$$U=\mathbb{R}^2\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\ ;\ (u,v)=(x+y,x-y)$$

   Etape 1 : le changement de variable φ (identification de φ et vérification que φ est bien $\mathcal{C}^2$)
$$\begin{array}{cccl}\varphi & : & U=\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & U\\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v)=\varphi(x,y)=(x+y,x-y)\end{array}$$
   Regardons maintenant que φ est bien un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de U dans U :
   (a) φ est clairement $\mathcal{C}^2$ de U dans U car les deux fonctions composantes sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

   (b) Montrons que φ est bien une bijection de U dans U :
$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\iff\begin{cases}x=u-y\\ v=u-2y\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v)\\ y=\frac{1}{2}(u-v)\end{cases}$$
   Donc φ est l'application bijective de U dans U définie par $\varphi^{-1}(u,v)=(\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2}(u-v))$.

   (c) φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

   Finalement φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans U.

   Etape 2 : introduction de la fonction g
   On introduit donc la fonction g définie par

   $f=g\circ\varphi\iff f(x,y)=(g\circ\varphi)(x,y)=g\big(\varphi(x,y)\big)=g\big(x+y,x-y\big)=g(u,v)$

Et, on a donc $g = f \circ \varphi^{-1}$. Or, compte-tenu du fait que f est φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on voit que g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U par composition.

Etape 3 : Dérivées de f
Puisque g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g. On a alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(u,v)} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x,y)} + \frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{(u,v)} \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x,y)} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(u,v)} \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x,y)} + \frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{(u,v)} \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x,y)} \end{cases}$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(u,v)} + \frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{(u,v)} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{(u,v)} - \frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{(u,v)} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$$

et finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$$

Etape 4 : expression de l'EDP en fonction de g.
Nous pouvons maintenant injecter les expressions des dérivées secondes de f dans l'EDP afin d'obtenir une EDP sur g (qui sera, normalement, beaucoup plus simple)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

avec les nombreuses simplifications de l'expression précédente, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

Cette EDP a pour solution

$$\forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = h(v) + k(v)$$

avec h et k deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Etape 5 : retour à la fonction f.
On rappelle que $f = g \circ \varphi$. Donc la solution de l'EDP initiale est

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(x+y, x-y\right) = h\left(x-y\right) + k\left(x+y\right)$$

avec h et k deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Résolution de l'EDP

$$U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ :\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ ;\ (u,v) = (x, y/x)$$

Etape 1 : le changement de variable φ (identification de φ et vérification que φ est bien $\mathcal{C}^2$)

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & U \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = \left(x, \frac{y}{x}\right) \end{array}$$

Regardons maintenant que φ est bien un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de U dans U :

(a) φ est clairement $\mathcal{C}^2$ de U dans U car les deux fonctions composantes sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

(b) Montrons que φ est bien une bijection de U dans U :

$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$$

Donc φ est l'application bijective de U dans U définie par $\varphi^{-1}(u,v) = (u, uv)$.

(c) φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

Finalement φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans U.

Etape 2 : introduction de la fonction g
On introduit donc la fonction g définie par

$$f = g\circ\varphi \Longleftrightarrow f(x,y) = (g\circ\varphi)(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g\big(x,\frac{y}{x}\big) = g(u,v)$$

Et, on a donc $g = f\circ\varphi^{-1}$. Or, compte-tenu du fait que f est φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on voit que g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U par composition.

Etape 3 : Dérivées de f
Puisque g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g. On a alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{cases}$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} - \frac{y}{x^2} \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{1}{x} \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Calculons maintenant la dérivée seconde croisée :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \times \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Etape 4 : expression de l'EDP en fonction de g.
Nous pouvons maintenant injecter les expressions des dérivées secondes de f dans l'EDP afin d'obtenir une EDP sur g (qui sera, normalement, beaucoup plus simple)

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - 2\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

avec les nombreuses simplifications de l'expression précédente, nous obtenons

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$$

or $x = u$ donc $u^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, et comme $u \in \mathbb{R}_+^*$, cette équation est équivalente à

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0 \tag{34}$$

Cette EDP a pour solution

$$\forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = uh(v) + k(v)$$

avec h et k deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Etape 5 : retour à la fonction f.
On rappelle que $f = g \circ \varphi$. Donc la solution de l'EDP initiale est

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(x, \frac{y}{x}\right) = xh\left(\frac{y}{x}\right) + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

avec h et k deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Résolution de l'EDP

$$U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ : \ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0\ ;\ (u,v) = (xy, y/x)$$

Etape 1 : le changement de variable φ (identification de φ et vérification que φ est bien $\mathcal{C}^2$)

$$\begin{array}{cccl} \varphi & : & U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & U \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = \big(xy, \frac{y}{x}\big) \end{array}$$

Regardons maintenant que φ est bien un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de U dans U :

(a) φ est clairement $\mathcal{C}^2$ de U dans U car les deux fonctions composantes sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

(b) Montrons que φ est bien une bijection de U dans U :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} u = xy \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} u = x^2 v \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{u}{v} \\ y = vx \end{cases}$$

or on sait que $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc

$$\begin{cases} x^2 = \frac{u}{v} \\ y = vx \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Donc φ est l'application bijective de U dans U définie par $\varphi^{-1}(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$.

(c) φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^2$ de U dans U.

Finalement φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans U.

Etape 2 : introduction de la fonction g
On introduit donc la fonction g définie par

$$f = g\circ\varphi \iff f(x,y) = (g\circ\varphi)(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g\big(xy, \frac{y}{x}\big) = g(u,v)$$

Et, on a donc $g = f\circ\varphi^{-1}$. Or, compte-tenu du fait que f est φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on voit que g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U par composition.

Etape 3 : Dérivées de f

Puisque g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g. On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{array}\right.$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = y \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} - \frac{y}{x^2} \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = x \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \frac{1}{x} \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \end{array}\right.$$

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées secondes qui interviennent dans l'EDP :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\left(y\frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et finalement, calculons la dernière dérivée manquante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = x\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left(x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\left(x\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Etape 4 : expression de l'EDP en fonction de g.

Nous pouvons maintenant injecter les expressions des dérivées secondes et premières de f dans l'EDP afin d'obtenir une EDP sur g (qui sera, normalement, beaucoup plus simple)

$$-4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial v}=0 \Longleftrightarrow uv\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=v\frac{\partial g}{\partial v}$$

or $v\in\mathbb{R}_+^*$ donc

$$u\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\frac{\partial g}{\partial v}$$

Introduisons maintenant la fonction $h=\frac{\partial g}{\partial v}$. On a alors l'équation suivante

$$h(u,v)-u\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(u,v)}=0$$

que l'on va résoudre comme une équation différentielle ordinaire puisque cette équation ne fait intervenir que la variable u. Pour cela, nous allons écrire de manière très impropre l'équation précédente de la façon suivante

$$h(u)-u\frac{dh}{du}=0 \Longleftrightarrow \frac{du}{u}=\frac{dh}{h} \Longleftrightarrow \ln(|h|)=\ln(u)+c$$

où $c\in\mathbb{R}$ pour l'instant. A noter que la première équivalence se justifie car $u\neq 0$ et par le théorème de Cauchy-Lipschitz $h\neq 0$. En prenant ensuite l'exponentielle de cette expression, on obtient finalement

$$h(u)=cu$$

Toutefois la fonction dépend normalement aussi de v. On peut rajouter cette dépendance, en introduisant $c(v)$ au lieu de $\mathbb{R}$ où c est une application $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors la solution de l'EDP sur h est de la forme

$$h(u,v)=c(v)u$$

Or $h=\frac{\partial g}{\partial v}$, donc

$$g(u,v)=C(v)u+D(u)$$

où C est la primitive de c et D est $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Etape 5 : retour à la fonction f.
On rappelle que $f=g\circ\varphi$. Donc la solution de l'EDP initiale est

$$\forall(x,y)\in U,\ f(x,y)=g\left(xy,\frac{y}{x}\right)=xy\times C\left(\frac{y}{x}\right)+D(xy)$$

4. Résolution de l'EDP

$$U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \ : \ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ;\ (u,v)=(\ln(x),\ln(y))$$

Etape 1 : le changement de variable φ (identification de φ et vérification que φ est bien $\mathcal{C}^2$)

$$\begin{array}{rccl}\varphi & : & U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v)=\varphi(x,y)=(\ln(x),\ln(y))\end{array}$$

Regardons maintenant que φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans $\mathbb{R}^2$:

(a) φ est clairement $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^2$ car les deux fonctions composantes sont $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que φ est bien une bijection de U dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}u=\ln(x)\\ v=\ln(y)\end{cases}\iff\begin{cases}x=e^u\\ y=e^v\end{cases}$$

Donc φ est l'application bijective de U dans U définie par $\varphi^{-1}(u,v)=(e^u,e^v)$.

(c) φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans U.

Finalement φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans $\mathbb{R}^2$.

Etape 2 : introduction de la fonction g
On introduit donc la fonction g définie par

$$f=g\circ\varphi\iff f(x,y)=(g\circ\varphi)(x,y)=g\big(\varphi(x,y)\big)=g\big(\ln(x),\ln(y)\big)=g(u,v)$$

Et, on a donc $g=f\circ\varphi^{-1}$. Or, compte-tenu du fait que f et φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^2$, on voit que g est $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans U par composition.

Etape 3 : Dérivées de f
Puisque g est $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans U, on peut exprimer les dérivées partielles

de f en fonction des dérivées partielles de g. On a alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{cases}$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{1}{x} \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \frac{1}{y} \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées secondes qui interviennent dans l'EDP :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

et finalement, calculons la dernière dérivée manquante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Etape 4 : expression de l'EDP en fonction de g.
Nous pouvons maintenant injecter les expressions des dérivées secondes et premières de f dans l'EDP afin d'obtenir une EDP sur g (qui sera, normalement, beaucoup plus simple)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Nous allons introduire un nouveau changement de variable :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (s,t) = \psi(u,v) = (u+v, u-v) \end{array}$$

On introduit alors la fonction h définie comme $g = h \circ \psi$. Alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{(s,t)} \left.\frac{\partial s}{\partial u}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{(s,t)} \left.\frac{\partial t}{\partial u}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{(s,t)} \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{(s,t)} \left.\frac{\partial t}{\partial v}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial h}{\partial s}\right|_{(u,v)} - \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

Je vous laisse montrer que les dérivées secondes qui interviennent dans l'EDP sont données par

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right|_{(u,v)} + 2\left.\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right|_{(u,v)} = \left.\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right|_{(u,v)} - 2\left.\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

Alors l'EDP sur g implique sur h :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = 0$$

qui a pour solution

$$h(s,t) = K(t) + L(s)$$

On a donc

$$g(u,v) = K(u-v) + L(u+v)$$

Et finalement

$$f(x,y) = K\left(\ln(x) - \ln(y)\right) + L\left(\ln(x) + \ln(y)\right) = K\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) + L\left(\ln(xy)\right)$$

5. Résolution de l'EDP

$$U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \ : \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ ; \ (u,v) = (x^2 - y, x^2 + y)$$

Etape 1 : le changement de variable φ (identification de φ et vérification que φ est bien $\mathcal{C}^2$)

$$\begin{array}{cccl} \varphi & : & U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = \left(x^2 - y, x^2 + y\right) \end{array}$$

Regardons maintenant que φ est bien un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de U dans $\mathbb{R}^2$:

(a) φ est clairement $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^2$ car les deux fonctions composantes sont $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que φ est bien une bijection de U dans U :

$$\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x^2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 2x^2 > 0 \\ v = x^2 + y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{u+v}{2} \\ v = x^2 + y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \text{ car } x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = v - x^2 = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Donc φ est l'application bijective de U dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi^{-1}(u,v) = (\sqrt{(u+v)/2}, (v-u)/2)$.

(c) φ^{-1} est bien $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans U. En effet : $u + v = 2x^2 > 0$ puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$ (pour le vérifier vous pouvez aussi calculer explicitement les dérivées partielles premières et secondes).

Finalement φ est bien un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans $\mathbb{R}^2$.

Etape 2 : introduction de la fonction g
On introduit donc la fonction g définie par

$$f = g \circ \varphi \iff f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g\big(x^2 - y, x^2 + y\big) = g(u,v)$$

Et, on a donc $g = f \circ \varphi^{-1}$. Or, compte-tenu du fait que f est φ^{-1} sont $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on voit que g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U par composition.

Etape 3 : Dérivées de f
Puisque g est $\mathcal{C}^2$ de U dans U, on peut exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g. On a alors

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,y)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y)} \end{cases}$$

ce qui donne, étant données les expressions de u et v

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u,v)} + 2x \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u,v)} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial g}{\partial u} + 2x\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2\frac{\partial g}{\partial v} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} + 2x\left(2x\frac{\partial}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + 2x\left(2x\frac{\partial}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 8x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Etape 4 : expression de l'EDP en fonction de g.
Nous pouvons maintenant injecter les expressions des dérivées secondes de f dans l'EDP afin d'obtenir une EDP sur g (qui sera, normalement, beaucoup plus simple)

$$16x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0 \iff 16\frac{u+v}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$$

or comme $u + v > 0$, on a finalement

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$$

Cette EDP a pour solution

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = L(v) + K(u)$$

avec L et K deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Etape 5 : retour à la fonction f.
On rappelle que $f = g \circ \varphi$. Donc la solution de l'EDP initiale est

$$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = g\left(x^2 + y, x^2 - y\right) = L(x^2 + y) + K(x^2 - y)$$

avec L et K deux applications $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(u,v) = f(u,v-u)$$

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v-u) - \frac{\partial f}{\partial y}(u,v-u)\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v-u) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v-u) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v-u)$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation aux dérivées partielles étudiée si et seulement si

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$

C'est-à-dire $g(u,v) = uC(v) + D(v)$ avec C et D fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. Ainsi les solutions sont

$$f(x,y) = xC(x+y) + D(x+y)$$

7.

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(u,v) = f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$

Par composition, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) - \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{4\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{4v\sqrt{uv}}\frac{\partial f}{partial y} = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}$$

Pour $v \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ est solution de l'équation différentielle $2uy' = y$. Par suite, il existe $C(v) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = C(v)\sqrt{u}$$

De plus la fonction $v \mapsto C(v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et si D désigne une primitive de celle :

$$g(u,v) = D(v)\sqrt{u} + H(u)$$

où H est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Finalement

$$(x,y) = D\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + H(xy)$$

où D et H sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 10 :

Déterminer les points critiques et les extrema des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
6. $f(x,y) = x\Big(\ln^2(x) + y^2\Big)$ (sur le demi-plan > 0)

Exercice 11 :

Déterminer les extrema locaux et globaux des applications suivantes.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & -3x^2y + 2x^4 \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (x+y)^2 - (x^4 + y^4) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array} \right.$
6. $f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & 3xy - x^3 - y^3 \end{array} \right.$
7. $f_7 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 9xy + 27 \end{array} \right.$
8. $f_8 : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x\ln(y) - y\ln(x) \end{array} \right.$
9. $f_9 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y \end{array} \right.$
10. $f_{10} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5 \end{array} \right.$
11. $f_{11} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^3 + y^3 \end{array} \right.$
12. $f_{12} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & (x-y)^2 + (x+y)^3 \end{array} \right.$
13. $f_{13} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array} \right.$

Exercice 12 :

On considère l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x;y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y) \end{array} \right.$

1. Déterminer les extrema locaux de g.
2. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \geq 1$.
   b) Montrer que $\forall (x;y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ g(x,y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$.
   c) En conclure que les extrema locaux de g sont globaux.