Chapitre 5

Matrices

5.1 Opérations sur les matrices

5.1.1 Définition

Définition 5.1. *Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$. On appelle* matrice *à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbf{K}$. On note une telle matrice*

$$M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- *On dit que M est une* matrice colonne *si $p = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice ligne *si $n = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice carrée *si $n = p$.*

Notation :

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- Si $p = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à n colonnes.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dit matrice carrée de taille n.
- Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, alors a_{ij} est le coefficient situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M.

Définition 5.2. *Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que :*

(1) M est une matrice triangulaire supérieure *(resp.* triangulaire strictement su-

périeure*)* *si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp.* $i \geq j$*). C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}).$$

(2) *M est une* matrice triangulaire inférieure *(resp.* triangulaire strictement inférieure*)* *si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$ *(resp.* $i \leq j$*). C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}).$$

(3) *M est une* matrice diagonale *si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \neq j$*. C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(4) M est symétrique (resp. antisymétrique) si $a_{ij} = a_{ji}$ *(resp.* $a_{ij} - a_{ji}$*) pour tout* $1 \leq i, j \leq n$*. C'est-à-dire :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, (\text{ resp. } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}).$$

Définition 5.3. *Soit* $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*. On appelle* transposée *de M la matrice* ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ *où* $b_{ij} = a_{ij}$*. c'est-à-dire :*

$${}^tM == \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les n lignes de M sont les n colonnes de ${}^tM$ *et les p colonnes de M sont les p lignes de* ${}^tM$*.*

Remarque 5.4. *(1) Une matrice carrée M est symétrique, si et seulement si,* $t^M = M$*.*

(2) Une matrice carrée M est antisymétrique, si et seulement si, $t^M = -M$*.*

5.1.2 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est un K-espace vectoriel

Opérations

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $A+B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de la façon suivante : $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Ainsi

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1P} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1P}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 5.5. *On ne somme que des matrices de même types.*

Définition 5.6. *Soit $M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soit $\lambda\in\mathbf{K}$. On définit la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. Ainsi*

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1P} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.7. *$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,.)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel d'élément nul $0=0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}=$*
$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Dimension

Définition 5.8. *Soit $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice E_{ij}, dont tous les coefficients sont nuls sauf à la $i$ième ligne et la $j$ième colonne qui vaut 1.*

Exemple 5.9. *(1) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, les matrices élémentaires sont*

$$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ les matrices élémentaires sont :

$$E_{11}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ldots,E_{n1}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 5.10. *La famille $B = (E_{ij}, 1 \leqslant i \leq n, 1 \leqslant j \leqslant p)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

Preuve:
Pour toute matrice $X = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a $X = \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}E_{ij}$. Donc B est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Montrons maintenant que B est libre. Soient $\lambda_{ij} \in \mathbf{K}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$ tel que $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ et montrons que $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. On a $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification on obtient le résultat $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$. □

Corollaire 5.11. *La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est $m \times p$. En particulier* $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{M}_{n,1}(K) = \dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K}) = n$.

Exemple 5.12. *(1) Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Nous remarquons que $\mathrm{card}(B) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. *Donc pour que B soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ il suffi que B soit libre sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbf{R}$, tel que $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_4 = 0$. On a $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$ est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On déduit facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

(2) Montrons que :

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. On a*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\} \\ &= \{a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K}\} \\ &= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*.*

(3) *Soit* $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0, \forall a, b, c, d \in \mathbf{K}$*. Montrons que* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*. Soit* f *l'application suivante*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) & \to & \mathbf{K} \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+b+c+d. \end{array}$$

Il est facile à vérifier que f *est une application linéaire, c'est-à-dire, pour tous* $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$*,* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *on a* $f(\lambda A + \beta B) = \lambda f(A) + \beta f(B)$*. On a*

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in \mathcal{M}_2(K) \mid f(M) = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0\} \end{aligned}$$

On remarque que $\ker f = H$ *et on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On déduit alors que* H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$*.*

5.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires

Proposition 5.13. $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ *l'ensemble des matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* n*.*

Remarque 5.14. *Une base de* $\mathcal{D}_n(\mathbf{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbf{K} \right\}$ *est* $B_1 = (E_{11}, \ldots, E_{nn})$*.*

Proposition 5.15. (1) *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inféreiures) est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$*.*

(2) *L'ensemble des matrices traingulaires strictement supérieures (resp. triangulaires strictement inférieures) est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$*.*

Remarque 5.16. (1) $\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i \leq j \leq n)$ *est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*

(2) $\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i < j \leq n)$ *est l'ensemble des matrices traingulaires strictement supérieures*

(3) $\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j \leq i \leq n)$ *est est l'ensemble des matrices triangulaires inféreiures.*

(4) $\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j < i \leq n)$ *est l'ensemble des matrices traingulaires strictement strictement inférieures.*

Exercice Montrer que :

(1) $\mathbf{T}_n^{\geqslant}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(2) $\mathbf{T}_n^{\leqslant}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

5.1.4 Propriétés du produit matriciel

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$, par $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.
Exemple Vérifier que pour tous $E_{ij}, E_{kl} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
Attention : Pour que cette multiplication matricielle soit possible il est necessaire que le nombre de colonnes de A soit egal au nombre de ligne de B. On apprend : "type(n,p)$\times$ type(p,q)=type(n,q).

Exemple 5.17.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 0 + 2 \times 1 & 0 + 2 \times -1 \\ -1 \times 1 + 1 \times 2 & 0 + 1 \times 1 & 0 + 1 \times -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Remarque 5.18. *Si les types de A et B permettent de calculer AB et BA, alors en général on n'a pas $AB = BA$. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.19. *(1) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K}), C \in \mathcal{M}q, m$, on a $(AB)C = A(CB)$;*

(2) pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, on a $(A + B)C = AC + BC$;

(3) pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, on a $A(B + C) = AB + AC$;

(4) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}p, q(\mathbf{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Remarque 5.20. *Dans l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées, la multilplications est une loi de composition interne. Elle admet comme élément neutre la matrice diagonale*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Puissance d'une matrice

Définition 5.21. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \times A, \ldots, A^m = A \times \cdots \times A$ (m termes).*

Attension : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + Ba^2 + AB^2 + BAB + B^2$.

Matrices inversibles

Définition 5.22. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$. Cette matrice B est alors unique, c'est l'inverse de A noté A^{-1}.*

Exemple 5.23. *La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.*

Proposition 5.24. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

(1) Si A et B sont inversibles alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Définition 5.25. *On note $\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 5.26. $(\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K}), \times)$ *est un groupe.*

Exemple 5.27. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On vérifie par le calcul que $A^2 - 5A = 2I_2$. Par suite $A(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2) = I_2$. On conclut alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.*

Remarque 5.28. *La somme de deux matrice inversible n'est pas toujours une matrice inversible. Par example :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Détermination pratique de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Lemme 5.29. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ si $AX = BX$, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ alors $A = B$.*

Comment chercher l'inverse d'une matrice carrée $A \in \mathrm{Gl}\,n(\mathbf{K})$ **:** Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. On introduit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbf{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Si cela est possible, on résout ce système dont les inconnus sont $x_1, \ldots, x_n$ et on obtient :

$$(S) : \begin{cases} x_1 & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Soit $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. Le système (S) est équivalent à $X = BY$. Ainsi $I_nX = BAX, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a $I_n = BA$ donc $A^{-1} = B$

Exemple 5.30. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. *Déterminons* A^{-1}. *Soient* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ *tel que* $Y = AX$. *On a :*

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 - x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3 + y_1) \\ x_1 = y_3 - y_1 + x_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

On déduit alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$