# 5.2 Représentations matricielles

## 5.2.1 Matrice colonne des composantes d'un vecteur

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$, $\forall x \in E, \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

**Définition 5.31.** *On appelle matrice des composantes dans $B$ du vecteur $x$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ telles que ses coefficients sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, qui sont les composantes de $x$ dans la base $B$. On la note* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

**Remarque 5.32.** *Puisque les composantes d'un vecteur dépend de la base choisie, il est necessaire de préciser la base.*

**Exemple 5.33.** *Soit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$, ($\forall 1 \leq i \leq n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$). On a* $\mathrm{Mat}_B(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Soit $x = (1, 2, 3, \dots, n) \in \mathbf{R}^n$, on a* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

## 5.2.2 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ notons $c_i$ la colonne des composantes dans $B$ du vecteur $x_i$.

**Définition 5.34.** *On appelle matrice des composantes dans la base $B$ de la famille des vecteurs $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont $c_1, \dots, c_p$, on la note* $\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$.

**Remarque 5.35.** *Si $p = 1$, on retrouve la définition de matrice des composantes du vecteur $x_1$ dans la base $B$.*

**Exemple 5.36.** *(1) Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de la base $B = (v_1, \dots, v_n)$. On a*

$$\mathrm{Mat}_B(B) = \mathrm{Mat}_B(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

*(2) Soit $E = \mathbf{K}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-1, 5, 6), x_3 = (4, 7, 9), x_4 = (4, -6, -7)$.*

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -6 \\ 3 & 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

*(3) Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$. Soient $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, $P_0 = (1+X)^0 = 1, P_1 = (1+X)^1 = 1+X, P_2 = (1+X)^2 = 1 + 2X + X^2, P_3 = (1+X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$. On a*

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 5.2.3 Matrice d'une application linéaire

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriles muni respectivement des bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$.

**Définition 5.37.** *On appelle matrice representative dans les bases $B$ et $C$ d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ la matrices des composantes dans $C$ de la famille image $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$, on la note $\mathrm{Mat}_{B,C}\, u = \mathrm{Mat}_C(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.*

**Remarque 5.38.** *La matrice représentative de $u$ dépend du choix des bases $B$ et $C$, il est donc necessaire de préciser ces derniers.*

**Exemple 5.39.** *(1) Soit $u$ l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y - z, x - y). \end{array}$$

*On muni $\mathbf{R}^3$ de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ ($e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$) et soit $C(v_1, v_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ ($v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$). Déterminons la matrice représentative de $u$ dans les bases $B$ et $C$. On a*

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (1, 1) = v_1 + v_2, \\ u(e_2) &= (2, -1) = 2v_1 - v_2, \\ u(e_3) &= (-1, 0) = -v_1 + 0v_2. \end{aligned}$$

*Donc*

$$\mathrm{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*(2) Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ (fixés) et $u$ l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}^3 \\ & & P & \mapsto & (P(a), P(b), P(c)) \end{array}$$

*On muni $\mathbf{R}_3[X]$ de sa base canonique $B = (P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2, P_3 = X^3)$ et on muni $\mathbf{R}^3$ de sa base canonique $C = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminons la matrice représentative de $u$ dans les bases $B$ et $C$. On a*

$$\begin{array}{rcl} u(P_0) & = & (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3, \\ u(P_1) & = & (a,b,c) = ae_1 + be_2 + ce_3, \\ u(P_2) & = & (a^2,b^2,c^2) = a^2e_1 + b^2e_2 + c^2e_3, \\ u(P_3) & = & (a^3,b^3,c^3) = a^3e_1 + b^3e_2 + c^3e_3. \end{array}$$

*On déduit que*

$$\mathrm{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

### 5.2.4 Matrice d'un endomorphisme

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et muni de la base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

**Définition 5.40.** *On appelle matrice représentative dans la base $B$ d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice représentative dans la base $B$ au départ et à l'arrivé de $u$, on la note* $\mathrm{Mat}_{B,B}\, u = \mathrm{Mat}_B\, u \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

**Exemple 5.41.** *(1) Soient $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $u = 1_E$ l'identité de $E$. On a* $\mathrm{Mat}_B\, u = I_n$.

*(2) Soit $B = (e_1, e_1, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soit $u$ l'endomorphisme suivant :*

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y). \end{array}$$

*On a*

$$\begin{array}{rcl} u(e_1) & = & (0,1,1) = e_2 + e_3, \\ u(e_2) & = & (1,0,1) = e_1 + e_3, \\ u(e_3) & = & (1,1,0) = e_1 + e_2. \end{array}$$

*Alors*

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Soient* $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$*, vérifions que* $B' = (v_1, v_2, v_3)$ *est une base de* $\mathbf{R}^3$*, pour cela il suffit de montrer que* $B'$ *est libre, car* $\operatorname{card}(B') = \dim \mathbf{R}^3 = 3$*. Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$*, tel que* $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ *et montrons que* $\alpha = \beta = \gamma = 0$*. On a* $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ *est équivalent à*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

*Donc* $B'$ *est libre. Déterminons* $\operatorname{Mat}_{B'} u$*. On a*

$$\begin{aligned} u(v_1) &= (2,2,2) = 2v_1, \\ u(v_2) &= (1,1,2) = 2v_1 - v_2, \\ u(v_3) &= (0,1,1) = v_1 - v_3. \end{aligned}$$

*Alors*

$$\operatorname{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 5.2.5 Image d'un vecteur

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis des bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, par convention on note $X$ et $Y$ les deux colonnes de $x$ et $y$ dans les bases $B$ et $C$.

**Théorème 5.42.** *Pour* $u \in \mathcal{L}(E,F)$*, la matrice de* $u$ *dans les bases* $B$ *et* $C$ *est l'unique matrice de* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ *vérifiant* $\forall x \in E, \forall y \in F$*,* $y = u(x) \leftrightarrow Y = AX$*.*

**Exemple 5.43.** *Soirt* $E$ *un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel muni d'une base* $B = (e_1, e_2, e_3)$*. Soit* $u$ *un endomorphisme de* $E$ *dont la matrice dans* $B$ *est*

$$\operatorname{Mat}_B u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

*Soit* $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$*. On peut calculer le vecteur* $u(x)$ *par produit matriciel.*

$$\operatorname{Mat}_B u(x) = AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

*On peut alors étudier le noyau de u en réslovant l'équation matricielle* $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$.

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$$

*Ainsi* $\ker u = \{0_E\}$ *et par suite l'endomrphisme u est bijectif. D'ou* $Im(u) = \mathbf{R}^3$.

### 5.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis de bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_n)$.

**Théorème 5.44.** *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_{B,C} & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ & & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{B,C}\, u \end{array}$$

*est un isomorphisme de* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*

**Corollaire 5.45.** *Soient $E$ et $F$ deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(E,F)$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F \times \dim E$. *En particulier,* $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ *et* $\dim E^* = \dim \mathbf{K} \times \dim E = \dim E$ *(avec* $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$*).*

**Remarque 5.46.** *Par l'isomorphisme de représentation matricielle, introduite une application linéaire u de E vers F équivaut à introduire sa représentation matricielle relative à des bases données de E et F. C'est trés souvent ainsi que sont introduit des applications linéaires en dimension finie*

### 5.2.7 Composition d'une application linéaire

Soient $E$ , $F$ et $G$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis de bases $B = (e_1, \ldots, e_p)$, $C = (v_1, \ldots, v_n)$ et $D = (g_1, \ldots, g_m)$.

**Théorème 5.47.** *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F,G)$*, on a :* $\mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{C,D}\, v \times \mathrm{Mat}_{B,C}\, u$.

### 5.2.8 Isomorphisme et matrice inversible

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis de bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_n)$.

**Théorème 5.48.** *Soient* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{B,C}\, u$ *on a équivalence entre*

*(1) u est un isomorphisme ;*

*(2) A est inversible.*

*De plus, si tel est le cas,* $\mathrm{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = A^{-1}$.

# 5.3 Formule de changement de base

## 5.3.1 Matrice de passage

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ muni de deux bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

**Définition 5.49.** *On appelle matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$ la matrice $P = \mathrm{Mat}_{B \to B'} = \mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_B(e'_1, \ldots, e'_n)$.*

**Exemple 5.50.** *soit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et de la base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, où $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$. La matrice de passage de la Base $B$ à la base $B'$ est*

$$\mathrm{Mat}_B\, B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 5.51.** *Si $P$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$ alors $P = \mathrm{Mat}_B(1_E(B'))$.*

**Attension :** Ici la matrice de l'endomorphisme $1_E$ n'est pas l'identité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

**Proposition 5.52.** *Si $P$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$ alors $P$ est inversible et $P^{-1}$ est la matrice de passage de la base $B'$ à la base $B$.*

**Exemple 5.53.** *Reprenons les notations de l'exemple précident.*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \qquad \text{et } P = \mathrm{Mat}_B\, B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Pour former la matrice de passage inverse $P^{-1}$, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base $B$ en fonction de ceux de la base $B'$. Al'aide du système précédent on obtient :*

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \qquad \text{et donc } P^{-1} = \mathrm{Mat}_{B'}\, B = \mathrm{Mat}_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 5.3.2 Nouvelle composante de vecteur

**Théorème 5.54.** *Soient $B$ et $B'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ si $x$ est un vecteur de $E$ dont on note $X$ et $X'$ les colonnes des composantes dans $B$ et $B'$ de $x$ alors on a $X = \mathrm{Mat}_{B \to B'} X'$.*

**Remarque 5.55.** *On retient la formule suivante* $\mathrm{Mat}_B\, x = \mathrm{Mat}_{B \to B'} \times \mathrm{Mat}_{B'}\, x$.

**Corollaire 5.56.** $X' = \mathrm{Mat}_{B' \to B}\, X$ *et* $\mathrm{Mat}_{B'}\, x = \mathrm{Mat}_{B' \to B} \times \mathrm{Mat}_B\, x$

### 5.3.3 Nouvelle représenatation d'une application linéaire

**Théorème 5.57.** *Soient $B$ et $B'$ deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel $E$, $f$ est un endomorphisme de $E$. Si $A = \mathrm{Mat}_B(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f)$ alors on a $A' = P^{-1}AP$, où $P$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$.*

Plus généralement :

**Théorème 5.58.** *Soient $B$ et $B'$ deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel $E$ et $C$ et $C'$ deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel $F$. Si $f$ est une application linéaire de $E$ vers $F$ dont on note $A = \mathrm{Mat}_C(f(B)))$ et $A' = \mathrm{Mat}_{C'}(f(B'))$ alors on a $A' = Q^{-1}AP$, où $P$ est la matrice de passage de la base $B$ à la base $B'$ et $Q$ est la matrice de passage de $C$ à $C'$.*