Cours d'Algèbre II : Première année préparatoire CY-TECH

Khaoula Ben Abdeljelil Guezguez

Année scolaire $2020 - 2021$

Table des matières

Chapitre 1

Systèmes linéaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire et de résoudre des systèmes de n équations à p inconnues. La technique principale, appelée méthode du Pivot de Gauss est très importante et on s'en servira beaucoup, notamment dans le cadre de l'algèbre linéaire (et donc des matrices).

1.1 Introduction

Définition 1.1. *On appelle système linéaire (S) de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ sont des nombres réels fixés appelés coefficients du système et les $(bi)_{i=1,\ldots,n}$ sont des réels fixés qui constituent le second membre du système. Les $x_1, \ldots, x_p$ sont les p inconnues du sytème.
Par commodité, chaque équation est repérée par un nom : L_i pour i-ème ligne.
Une solution du système est un p-uplet $(x_1; x_2; \ldots; x_p)$ pour lesquels toutes les équations sont vérifiées.
Résoudre le système (S), c'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.

Tout étudiant a déjà rencontré par exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquelles deux méthodes de résolution ont été présentées : par substitution ou combinaisons linéaires. On verra dans la suite qu'on va généraliser la méthode de combinaisons linéaires. On peut commencer par vérifier qu'on sait faire sans difficulté l'exercice suivant.

Définition 1.2. *Un système est dit :*

1. *compatible lorsqu'il admet au moins une solution, incompatible s'il n'en admet aucune ;*
2. *homogène lorsque le second membre est constitué uniquement de coefficients nuls. On appelle système homogène associé à un système (S) le système obtenu en gardant les mêmes coefficients et en remplaçant le second membre par des 0 ;*

3. *de Cramer lorsque $n = p$ et lorsque le système possède une unique solution ;*
4. *triangulaire (ou échelonné) lorsqu'il est de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

5. *Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.*

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

1. Intervertir deux équations : ,
2. Intervertir l'ordre des inconnues,
3. Remplacer une équation par combinaisosns linéaires des autres équations.

1.2 Échelonner un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss

L'idée est de résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients, car ce genre d'opérations permet toujours de se ramener à un système équivalent à celui de départ.

Proposition 1.3. *Les opérations suivantes conduisent à un système équivalent au système précédent :* $(1) L_i \leftrightarrow L_j$ *: échanger les lignes i et j.*
$(2) L_i \leftarrow aL_i$*, où $a \in \mathbf{R}$: multiplier la ligne i par a.*
$(3) L_i \leftarrow L_i + bL_j$*, où $i \neq j, b \in \mathbf{R}$: ajouter b fois la ligne j à la ligne a.*
$(4) L_i \leftarrow aL_i + bL_j$*, où $i \neq j$, $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$: remplacer Li par $aL_i + bL_j$*

Étant donné un système d'équations linéaires, la méthode du pivot de Gauss a pour but est de construire un système échelonné qui soit équivalent au système donné ; les systèmes échelonnés sont, en effet, faciles à résoudre.

Un premier exemple

Pour expliquer cette méthode le plus simple est de commencer par un exemple. Considérons le système dont les inconnues sont x, y, z, t et où a, b sont des paramètres fixés.

$$\left[\mathcal{S} \begin{cases} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & (E_1) \\ 2x & + & 4y & - & z & - & 5t & = & 5a & (E_2) \\ -x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & b & (E_3) \end{cases} \right]$$

Choisissons une équation avec un coefficient non nul pour la première inconnue x. Ici la première équation convient avec le coefficient 1, pour x, qu'on appelle le premier pivot. On va utiliser ce pivot de notre algorithme pour faire disparaître l'inconnue x des autres équations. Pour cela on ajoute à ces équations la première multipliée par un coefficient convenable. On obtient un système linéaire équivalent :

$$\left[\mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a \qquad (E_1') = (E_1) \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a \qquad (E_2') = (E_2) - 2(E_1) \\ & & & + & 2z & + & 2t & = & b+a \qquad (E_3') = (E_3) + (E_1) \end{array} \right. \right]$$

Examinons maintenant le système obtenu en supprimant la première équation. On remarque que la variable x n'y apparaît pas. La variable suivante y non plus. On est ramené à un système de deux équations avec ici deux variables en moins. Choisissons notre deuxième pivot. On le trouve dans l'équation (E_2'). C'est le coefficient -3 de z. Nous allons l'utiliser pour éliminer z des équations suivantes (ici, il n'en reste qu'une). Réécrivons notre nouveau système :

$$\left[\mathcal{S}'' \left\{ \begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a \qquad (E_1'') = (E_1') \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a \qquad (E_2'') = (E_2') \\ & & & & & & 0 & = & b+3a \qquad (E_3'') = (E_3') + \frac{2}{3}(E_2') \end{array} \right. \right]$$

Le système obtenu a la forme d'un escalier, avec deux grandes marches. On dit qu'on a échelonné le système.

Description de l'algorithme

Rappelons que le but est d'obtenir un système équivalent au système donné et qui soit échelonné c'est-à-dire de la forme :

$$\left[\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1,n}x_n = b_1 \\ & & & & x_2 & + & a_{2,3}x_3 + \dots & + & a_{2,n}x_n = b_2 \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots & + & a_{p,n}x_n = b_p \\ & & & & & & & & 0 = b_{p+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 = b_m \end{array} \right. \right]$$

avec $1 \leq p \leq m$. Avec l'exemple précédent on peut comprendre facilement le fonctionnement de l'algorithme pour un système quelconque d'équations.

1. On cherche un pivot, premier coefficient non nul d'une certaine variable x_i dans une des équations. Par permutation, cette équation devient la première équation.
2. On utilise ce pivot et cette équation pour éliminer x_i des équations suivantes. Pour cela on ajoute cette équation multipliée par un coefficient convenable aux équations suivantes.
3. S'il y a des équations dont le premier membre est nul $0 = \dots$ on les place en dernier.

4. On recommence à l'étape 1 avec le système privé de la première équation.

L'algorithme s'arrête lorsqu'il ne reste plus que des équations $0 = \ldots$.

Proposition 1.4. *1. Un système échelonné possède des solutions si et seulement si les équations de compatibilité sont satisfaites (portant sur les données).*

2. Si ces conditions sont satisfaites alors toute donnée des inconnues non principales détermine une unique solution du système. C'est équivaut à dire les solutions du sytème sont paramétrées par les inconnues non principales :

Les inconnues des lignes non nulles s'appellent les inconnues principales, ou pivots

Exprimons plus en détails une des étapes de cet algorithme. L'objectif est d'obtenir, à l'issue de l'étape k un système de la forme $\mathcal{H}_k$ suivante :

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_{n_1} & + & a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} & + & \ldots & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ & & & & x_{n_2} & + \quad a_{2,n_2+1}x_{n_2+1} + \ldots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & x_{n_k} + a_{k,n_k+1}x_{n_k+1} + \ldots & + & a_{k,n}x_n & = b_k \\ & & & & & 0 + a_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1} + \ldots & + & a_{k+1,n}x_n & = b_{k+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 + a_{m,n_k+1}x_{n_k+1} + \ldots & + & a_{m,n}x_n & = b_m \end{array}\right.\right] ,$$

avec $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq n$.

Décrivons à présent l'étape k de la méthode du Pivot de Gauss : étant donné un système de la forme $\mathcal{H}_{k-1}$, nous allons le transformer de façon à obtenir un système de la forme $\mathcal{H}_k$.

Nous noterons E_j la $j^{ème}$ équation du système.

— On ne modifie pas les $k-1$ premières équations du système linéaire.
— Si tous les coefficients $a_{l,m}$ (avec $l \geq k$ et $m > n_{k-1}$) sont nuls, alors, pour tout $l \geq k$, l'équation E_l s'écrit : $0 = b_l$. Le système a donc la forme voulue. L'algorithme s'arrête.
— Sinon, on pose $n_k := \min\{m \ : \ \exists l \geq k \ : \ a_{l,m} \neq 0\}$. Alors, quitte à échanger la ligne k avec une ligne $p \geq k$ (telle que $a_{p,n_k} \neq 0$), on se ramène au cas où a_{k,n_k} est non nul (ce sera notre pivot pour l'étape k).
On remplace alors l'équation E_k par $\frac{1}{a_{k,n_k}} E_k$ pour se ramener à : $a_{k,n_k} = 1$.
— Puis, pour tout $p > k$, on remplace E_p par $E_p - a_{p,n_k}E_k$ (afin d'éliminer les termes en x_{n_k} des équations $k+1, \ldots, m$).
— Le système d'équations linéaires ainsi obtenu est alors de la forme $\mathcal{H}_k$, l'étape k est finie.

Un autre exemple

Pour résoudre le système suivant dans $\mathcal{R}^4$, on veut échelonner ce système :

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 & (E_3) \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous allons utiliser la méthode précédente : à chaque étape, le pivot sera encadré. Les systèmes d'équations linéaires obtenus sont équivalents au système donné.

Il y a un terme en x dans la première équation, notre premier pivot de Gauss sera ce terme : nous l'utilisons pour éliminer les termes en x des autres équations

$$\left[\left\{\begin{array}{cccccccccccc} \boxed{\text{x}} & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E'_3 = E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous oublions à présent la première ligne ; il n'y a pas de terme en y dans les équations E_2, E'_3 et E_4 ; il y a un terme en z dans E'_3 mais pas dans E_2 ; nous permutons donc les équations E_2 et E'_3

$$\left[\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E'_2 = E'_3) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E''_3 = E_2) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous divisons la deuxième équation par 3 de sorte à avoir z au lieu de $3z$ dans la deuxième équation

$$\left[\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E''_2 = \frac{1}{3}E'_2) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E''_3) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Le terme en z de la deuxième équation est notre nouveau pivot de Gauss ; nous l'utilisons pour éliminer les termes en z des équations situés en dessous

$$\left[\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & \boxed{\text{z}} & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E''_2) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E''_3) \\ & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E'_4 = E_4 - 2E''_2) \end{array}\right.\right]$$

Nous oublions à présent la deuxième équation ; il y a un terme en t dans la troisième équation, nous divisons la troisième équation par 8 de sorte à avoir t à la place de $8t$ dans cette équation

$$\left[\left\{\begin{array}{cccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E''_2) \\ & & & & & & t & & & = & \frac{1}{4} & (E'''_3 = \frac{1}{8}E''_3) \\ & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E'_4) \end{array}\right.\right]$$

Le terme en t de la troisième équation devient notre nouveau pivot de Gauss : nous l'utilisons pour éliminer les termes en t de la quatrième équation

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & = & 0 & (E_2'') \\ & & & & & & \boxed{\text{t}} & & = & \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ & & & & & & & u & = & \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{array}\right.\right]$$

Ce système d'équations linéaires est échelonné et équivalent à notre système initial.

1.3 Rang d'une matrice

Définition 1.5. *Une matrice B est dite èchelonnèe en lignes si*

1. *chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente, et*
2. *les lignes nulles (ne contenant que des 0) de B viennent en bas après les lignes non nulles.*

Toute matrice A peut se réduire à une matrice échelonnée en lignes B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On appelle B la forme échelonnée en lignes de A.
Une des concepts fondamentaux dans l'algèbre linéaire est le rang d'une matrice. Il admet de plusieurs définitions équivalentes. En voici la première.

Définition 1.6. *Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note rgA.*

Exemple 1.7. *La matrice suivante A se réduit en sa forme échelonnée en lignes par les pivotages*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} L2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a $rgA = 3$. Pour la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $rg(C) = 2$.

Théorème 1.8. *Pour toute matrice A on a*
$rgA \leqslant$ nombre de lignes de A,
$rgA \leqslant$ nombre de colonnes de A.

Idée de la preuve. En réduisant la matrice A en une matrice échelonnée en lignes similaire à celle-ci

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les pivots (les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles) sont dans lignes distinctes et dans des colonnes distinctes. Donc on a
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de lignes de A,
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de colonnes de A.
Le nombre de pivots est aussi le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée de A, d'où
nombre de pivots $= rgA$.

1.3.1 La matrice des coefficients

On peut associer une matrice à chaque membre d'un système linéaire. Pour le système

$$\begin{cases} x - 3y + 6z + 2w & = & -1, \\ 2x - 5y + 10z + 3w & = & 0, \\ 3x - 8y + 17z + 4w & = & 1, \end{cases}$$

on a des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec A la matrice des coefficients regroupant les coefficients des variables du membre de gauche du système, et le vecteur colonne b contient le membre de droite. Quand on met les deux ensemble, on a la matrice augmentée quéon a déjà vue

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Le rang et les systèmes linèaires

On va étudier les systèmes linéaires en considérant le membre de gauche comme fixe, mais le membre de droite comme éventuellement variable. Dans cette optique, il est convenable de considérer le rang d'un syst'eme linéaire comme dépendant uniquement de son membre de gauche. D'où :

Définition 1.9. *Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice des coefficients A.*

Par exemple, le rang du système ci-dessus est 3, selon les calculs faits sur la page précédente.

1.4 Systèmes de Cramer

On peut donner des critères selon lesquels un système sera de Cramer.

Théorème 1.10. *Un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si la méthode du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots (non nuls).*

Théorème 1.11. *Un système est de Cramer si et seulement si son système admet une seule solution.*

Exercice . Pour quelles valeurs du paramètre λ le système suivant est de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + \lambda y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (\lambda - 5)z = 7 \end{cases}$$

Chapitre 2

Groupe

2.1 Lois de composition internes

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble.

Définition 2.1. *On appelle loi de composition interne sur E (lci) toute application de $E \times E$ dans E.*

Définition 2.2. *On appelle magma tout couple constitué d'un ensemble et d'une lci.*

Exemple 2.3. $(\mathbf{Z}, -)$ *est un magma, mais pas* $(\mathbf{N}, -)$*, car* $-4 \notin \mathbf{N}$.

Dans toute la suite, $\star$ est une lci sur E.

2.1.1 Propriétés usuelles des lci

Définition 2.4. *Soit* $(E, \star)$ *un magma.*

On dit que E est associatif si pour tout $x, y, z \in E$, on a : $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$. *L'élément* $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ *est alors noté* $x \star y \star z$.

On dit que E est commutatif si pour tout $x, y \in E$, on a : $x \star y = y \star x$.

Soit $\sharp$ une seconde lci sur E. On dit que dans E $\star$ est distributive par rapport à $\sharp$ si pour tout $x, y, z \in E$, on a :
- $x \star (y \sharp z) = (x \star y) \sharp (x * z)$
- $(y \sharp z) \star x = (y \star x) \sharp (z \star x)$.

Remarque 2.5. *On dit que dans* $(E, \star)$ *est distributive à gauche par rapport à $\sharp$ si pour tout $x, y, z \in E$, on a :* $x \star (y \sharp z) = (x \star y) \sharp (x \star z)$. *De même, on a la notion de distributivié à droite.*

Exemple 2.6.
1. $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ *avec $+$ ou $\times$ sont associatifs, mais pas* $(\mathbf{Z}, -)$ *car* $1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3$.
2. $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ *avec $+$ ou $\times$ sont commutatifs, mais pas* $(\mathbf{Z}, -)$*, ni* $(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \circ)$.
3. *Sur* $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{N} \times$ *est distributive par rapport à $+$, et sur $\mathcal{P}(E)$, $\cap$ et $\cup$ sont distributives l'une par rapport à l'autre.*

Définition 2.7. *1. Soit $e \in E$. on dit que e est un élément neutre à gauche (resp. à droite) pour $\star$ si pour tout $x \in E$ on a $e \star x = x$ (resp. $x \star e = x$). On dit que e est un élément neutre pour $\star$ si c'est un élément neutre à gauche et à droite, i.e. pour tout $x \in E, e \star x = x \star e = x$.*

2. Soit e un neutre pour $\star$ et soit $x \in E$. On dit que x est inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe un élément $y \in E$ tel que $y \star x = e$ (resp. $x \star y = e$). Un tel élément y s'appelle UN inverse à gauche (resp. à droite) de x. On dit que x est inversible s'il est inversible à gauche et à droite, i.e. il existe $y \in E$ tel que $y \star x = x \star y = e$. Dans ce cas y est UN inverse de x.

Exemple 2.8. — 0 *est un élément neutre pour* $+$ *dans* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$.

— 1 *est un élément neutre pour* $\times$ *dans* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$.
— 1_E *est un élément neutre pour dans* $\mathcal{F}(E, E)$, *et les bijections sont tous les éléments inversibles de cet ensemble.*

Remarque 2.9. *1. Être inversible d'un seul côté ne suffit pas pour être inversible tout court.*

2. Un neutre est toujours inversible et est son propre inverse.

Proposition 2.10. *Si $\star$ admet un neutre, alors ce neutre est unique.*

Preuve:
Soient e et e' deux neutres. Alors $e \star e' = e$ et $e \star e' = e'$, donc $e = e'$. □

Proposition 2.11. *On suppose la loi $\star$ associative, et admettant un neutre e. Si un élément est inversible, alors il a un seul inverse.*

Preuve:
Soient y et y' deux inverses de $x \in E$. Alors $y \star x = e$ et $x \star y' = e$. Donc $y \star (x \star y') = y \star e = y$ et $(y \star x) \star y' = e \star y' = y'$, d'où $y = y'$. □

Remarque 2.12. *On utilise souvent les notations additives et multiplicatives.*

1. En notation additive, $\star$ est en général notée $+$, $x + x + \cdots + x$ ($n-$fois(se note nx, et si x est inversible, son inverse se note $-x$. On l'appelle alors plutôt l'opposé de x. De même, on notera le neutre d'une telle structure 0, ou 0_E.

2. En notation multiplicative, $\star$ est en général remplacée par $\times$ (et ce symbole est même souvent omis), $x \times x \times \cdots \times x$ ($n-$fois) se note x^n et si x est inversible, son inverse se note x^{-1}. De même, on notera le neutre d'une telle structure 1, ou 1_E.

Pour éviter toute erreur, on essaiera au maximum de n'utiliser la notation additive que pour des lois qui ont les mêmes propriétés que la loi $+$ sur $\mathbf{R}$.
Par exemple, noter $+$ une lci non commutative peut-être déroutant, ainsi que pour une lci pour laquelle tous les éléments ne sont pas inversibles. La notation $+$ est en général réservée à des lci commutatives et pour lesquelles les éléments sont tous inversibles.
Ce n'est pas le cas pour la notation multiplicative, qui est la plus couramment utilisée pour des lois associatives, mais sans plus. Par exemple il est fréquent d'utiliser $\times$

même pour une lci non commutative et pour laquelle les éléments ne sont pas tous inversibles. Donc faites attention, par défaut on aura $xy \neq yx$, et x^{-1} n'existera pas forcément !
Dans toute la suite, on adoptera la notation multiplicative, et on suppose que E a un neutre noté 1.

Proposition 2.13. *On suppose la loi $\star$ associative. Soient $x, y, z \in E$.*

1. *Simplification par un inversible : si x est inversible, alors $x \star y = x \star z \Leftrightarrow y = z$.*
2. *Inverse d'un produit : si x et y sont inversibles alors $x \star y$ l'est aussi et $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.* **Attention : l'inverse de $x \star y$ n'a aucune raison d'être** *$x^{-1} \star y^{-1}$.*
3. *Puissances négatives : si x est inversible, on pose pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Alors $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.*
4. *Inverse d'un inverse : si x est inversible, x^{-1} l'est aussi et $(x^{-1})^{-1} = x$.*

Preuve:

(3) Par récurrence. Vrai si $n = 0$ ou 1. Si vrai pour n, alors $x^{n+1} \star x^{-n-1} =$

$x^n \star x \star x^{-1} \star x^{-n} = x^n \star e \star x^{-n} = x^n \star x^{-n} = e$.
(4) Vrai par unicité de l'inverse. □

Définition 2.14. *Soit $(E, \star)$ un magma et F une partie de E. On dit que F est une partie stable (de E par $\star$) si pour tous $x, y \in F, x \star y \in F$.*

Exemple 2.15. $\{-1, 1\}$ *est une partie stable de* $(\mathbf{R}, \times)$*, mais pas* $\{-2, 2\}$.

2.2 Structure de groupe

2.2.1 Définition et exemples

Définition 2.16. *On appelle groupe tout magma associatif, ayant un neutre, et dont tout élément est inversible. Si un groupe est commutatif (ce qui signifie en fait que sa loi est commutative), il est dit abélien. Par défaut on utilise la notation multiplicative pour un groupe, sauf pour les groupes abéliens pour lesquels on utilise la notation additive.*

Exemple 2.17.
1. $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ *sont des groupes avec la loi $+$, mais pas avec la loi $\times$.*
2. *Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{Q}^n$, $\mathbf{Z}^n$ sont des groupes avec la loi $+$.*
3. $\mathbf{C}^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{Q}^*$*, sont des groupes avec la loi $\times$.*

4. *$\mathbf{N}$ n'est un groupe ni avec la loi $+$ ni avec la loi $\times$.*

Définition 2.18. *Soit X un ensemble non vide. On appelle groupe des permutations de X l'ensemble des bijections de X dans X. Comme son nom l'indique, c'est un groupe, si on le munit de la loi de composition $\circ$. On le note $\mathcal{S}_X$.*

2.2.2 Sous-groupes

Dans toute la suite, $(G, \star)$ est un groupe de neutre e. On adopte la notation multiplicative

Définition 2.19. *On appelle sous-groupe de G tout ensemble H vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$H \subset G$;*
2. *$e \in H$;*
3. *Stabilité par produit : $\forall x, y \in H, x \star y \in H$;*
4. *Stabilité par passage à l'inverse : $\forall x \in H$, on a $x^{-1} \in H$.*

Exemple 2.20. *Sont des sous-groupes :*

1. *$\{e\}$ et G dans $(G, \star)$.*
2. *$\mathcal{U}$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$.*
3. *$n\mathbf{Z}$ dans $(\mathbf{Z}, +)$.*
4. *$H = \{f \in \mathcal{S}_{\mathbf{R}} \mid f(0) = 0\}$ dans $(\mathcal{S}_{\mathbf{R}}, \circ)$.*

Proposition 2.21. *Un ensemble H est un sous groupe de G si et seulement si H est un sous-ensemble non vide de G et pour tout $(x, y) \in H^2$, on a $x^{-1} \star y \in H$.*

Preuve:
Montrons l'implication et sa réciproque :

1. "$\Rightarrow$" Supposons que H est un sous-groupe de G. Alors H contient e et n'est donc pas vide. De plus, soit $(x, y) \in H$. H étant stable par passage à l'inverse, on a alors $x^{-1} \in H$ et par stabilité par produit, on a donc $x^{-1} \star y \in H$.
2. "$\Leftarrow$" Réciproquement, supposons que H est non vide et que pour tout $(x, y) \in H^2$, on a $x^{-1} \star y \in H$. Montrons que H possède les trois propriétés énumérées dans sa définition :
   (a) H étant non vide, il possède au moins un élé- ment x_0. On a alors $e = x_0^{-1} \star x_0 \in H$.

(b) Soit $x \in H$. On a alors $(x, e) \in H^2$, donc $x^{-1} \star e \in H$.
(c) Soit $(x, y) \in H$. D'après ce qui précède, on a alors $x^{-1} \in H$, donc $(x^{-1}, y) \in H^2$, donc $x * y = (x^{-1})^{-1} \star y \in H$.

□

Remarque 2.22. *On obtient une proposition vraie également en remplaçant ci-dessus la condition $x^{-1} \star y \in H$ par $x \star y^{-1} \in H$.*

Théorème 2.23. *Un sous-groupe muni de la loi induite du groupe est lui-même un groupe.*

Preuve:
Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e et H un sous-groupe de G.

1. Montrons qu'on peut restreindre $\star : G \times G \to G$ au départ à $H \times H$ et à l'arrivée à H. On appellera alors loi induite par $\star$ sur H cette restriction de $\star$. On a $H \times H \subset G \times G$, donc la restriction au départ est légitime, pour effectuer la restriction à l'arrivée, il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in H^2$, on a $x \star y \in H$, c'est-à-dire que H est stable par $\star$. Or H est un sous-groupe de G donc c'est évident.
2. H muni de la loi induite par $\star$ est un magma associatif. En effet $(G, \star)$ est un magma associatif, on a donc
$$\forall (x, y, z) \in G^3 \qquad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$
Or $H \subset G$ donc
$$\forall (x, y, z) \in H^3 \qquad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$
Donc la restriction de $\star$ à $0H$ est associative, d'où le résultat.
3. e est neutre pour la loi induite par $\star$ sur H. En effet, e est le neutre de $\star$, donc
$$\forall x \in G \qquad e \star x = x \star e = x$$
D'où le résultat.
4. Tout élément de H admet un inverse pour la loi induite par $\star$. En effet tout élément x de H admet un inverse x^{-1} dans G pour la loi $\star$ et par stabilité de l'inverse sur le sous-groupe H, on a $x^{-1} \in H$. Donc tout élément de H admet un inverse dans H pour la loi induite par $\star$.
5. On déduit des points précédents que H muni de la loi induite par $\star$ est un groupe.

□

Remarque 2.24. *Il est plus facile de montrer qu'un ensemble est un sous-groupe que de montrer que c'est un groupe (pas besoin de redémontrer l'associativité, etc.). Par exemple $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe, vu comme sous-groupe de $(\mathbf{C}^*, \times)$.*
À chaque fois que l'on essaiera de montrer qu'un ensemble est muni d'une structure de groupe, on tentera de le voir comme un sous-groupe d'un groupe bien connu.

Remarque 2.25. *La réciproque de ce théorème est également vraie (bien que moins utilisée) : si H est un sous-ensemble de G tel que, muni de la loi induite par celle de G, H soit un groupe, alors H est un sous-groupe de G.*

Exemple 2.26. *Si $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathcal{U}, \times)$, donc $(\mathcal{U}_n, \times)$ est un groupe.*

2.2.3 Morphismes de groupes

Définition 2.27. *Soient* $(G, \star)$ *et* $(G', \sharp)$ *deux groupes et* $\varphi : G \to G'$.

1. *On dit que* φ *est un morphisme du groupe* $(G, \star)$ *dans le groupe* $(G', \sharp)$, *si*
$$\forall x, y \in G, \qquad \varphi(x \star y) = \varphi(x) \sharp \varphi(y).$$
2. *Tout morphisme d'un groupe dans lui-même est appelé endomorphisme.*
3. *Tout morphisme de* G *dans* G' *qui est une bijection est appelé isomorphisme de* G *sur* G'. *Dans ce cas on dit que* G *et* G' *sont isomorphes. Un morphisme qui est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme est appelé automorphisme.*

Exemple 2.28.

1. $(\mathbf{Z}, +) \to (\mathbf{Z}, +), x \mapsto 2x$ *est un morphisme, mais pas un isomorphisme.*

2. $(\mathbf{C}^*, \times) \to (\mathbf{R}^*, \times), z \mapsto |z|$, *est un morphisme, mais pas un isomorphisme.*

3. $(\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{C}^*, \times), x \mapsto e^{ix}$, *est un morphisme, mais pas un isomorphisme.*

4. $(\mathbf{R}, +) \to (\mathbf{R}_+^*, \times), x \mapsto e^x$ *est un isomorphisme de réciproque* $\ln$, *qui est aussi un isomorphisme.*

Exemple 2.29. *Etudions les applications suivantes*

1. *Si* $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\begin{array}{cccc} \varphi_n & : & (\mathbf{C}^*, \times) & \to & (\mathbf{C}^*, \times) \\ & & z & \mapsto & z^n \end{array}$$

2. *Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}^n$, l'application*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_n & : & (\mathbf{K}^n, +) & \to & (\mathbf{K}, +) \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \end{array}$$

Dans toute la suite, $(G, \star)$ et $(G', \sharp)$ sont deux groupes de neutres e et e', on adopte une notation muliplicative, et $\varphi : G \to G'$ est un morphisme.

Théorème 2.30. *Soit φ un morphisme de G sur G', on a, e et e' désignant les neutres de G et G' :*

1. $\varphi(e) = e'$;
2. $\forall x \in G,\ \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Preuve:

1. On a $\varphi(e)\sharp\varphi(e) = \varphi(e \star e) = \varphi(e) = \varphi(e)\sharp e'$, donc en simplifiant par $\varphi(e)$, on en déduit $\varphi(e) = e'$.
2. Soit $x \in G$. Alors $\varphi(x^{-1})\sharp\varphi(x) = \varphi(x^{-1} \star x) = \varphi(e) = e$.

□

Corollaire 2.31. *Sous les mêmes hypothèses, on a*

$$\forall x \in G \qquad \forall k \in \mathbf{Z} \qquad \varphi(x^k) = \varphi(x)^k.$$

Preuve:
Soit $x \in G$. D'après le théorème ci-dessus, on a

$$\varphi(x^0) = \varphi(e) = e' = \varphi(x)^0.$$

On peut alors démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$ (l'hérédité résulte directement de la définition de morphisme).
D'après le théorème ci-dessus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\varphi(x^{-n}) = \varphi(xn)^{-1}$$

d'où $\varphi(x^{-n}) = \varphi(x)^{-n}$. On en déduit le résultat. □

Exemple 2.32. 1. *$\mathbf{C}^* \to \mathbf{R}^*, z \mapsto |z|$ est un morphisme de $(\mathbf{C}^*, \times)$ dans $(\mathbf{R}^*, \times)$, donc pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, on a*

$$\mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{\mid z \mid}$$

2. *exp est un morphisme de* $(\mathbf{C},+)$ *dans* $(\mathbf{C}^*,\times)$*, donc pour tout* $z \in \mathbf{C}$*,* $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

3. ln *est un morphisme de* $(\mathbf{R}_+^*,\times)$ *dans* $(\mathbf{R},+)$*, donc pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$*, on a* $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.

Théorème 2.33. 1. *La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupe. Plus précisément, soit* $(G_1,\star_1)$*,* $(G_2,\star_2)$ *et* $(G_3,\star_3)$ *trois groupes,* φ *un morphisme de* G_1 *dans* G_2 *et* φ *un morphisme de* G_2 *dans* G_3*. Alors* $\psi \circ \varphi$ *est un morphisme de* G_1 *dans* G_3*.*

2. *La fonction réciproque d'un isomorphisme (en tant qu'application bijective) est un isomorphisme. Plus précisément, soit* $(G_1,\star_1)$ *et* $(G_2,\star_2)$ *deux groupes et* φ *un isomorphisme de* G_1 *sur* G_2*. Alors* φ^{-1} *est un isomorphisme de* G_2 *sur* G_1*.*

Preuve:

$\square$

Théorème 2.34. *1. L'image d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.*

2. L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.

Preuve:
Les démonstrations pour montrer qu'un ensemble est un sous-groupe ont TOUJOURS la même structure.

1. Soient $(G, \star)$ et $(G', \sharp)$ deux groupes de neutres respectifs e et e', et $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes. Soit H un sous-groupe de G. Montrons que $\varphi(H)$ est un sous-groupe de G'.
   (a) On a évidemment $\varphi(H) \in G'$ et de plus $e \in H$ et $e' = \varphi(e) \in \varphi(H)$.
   (b) Soit $x, y \in \varphi(H)$. Alors x possède un antécédent $x' \in H$ et y un antécédent $y' \in H$ par φ. On a alors successivement

$$\begin{aligned} x\sharp y^{-1} &= \varphi(x')\sharp\varphi(y')^{-1} && \text{par définition de} x' \text{ et } y' \\ &= \varphi(x')\sharp\varphi(y'^{-1}) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme} \\ &= \varphi(x' \star y'^{-1}) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme} \end{aligned}$$

   Donc $x\sharp y^{-1} \in \varphi(H)$.
   $\varphi(H)$ est donc un sous-groupe de G'.
2. Gardons les même notations que dans le premier point, et notons H' un sous-groupe de G'.
   (a) On a évidemment $\varphi^{-1}(H') \subset G$ et de plus $e' \in H'$ et $\mathrm{e}' = \varphi(e) \in H'$ donc $e \in \varphi^{-1}(H')$.
   (b) Soit $x, y \in \varphi^{-1}(H')$. Alors $\varphi(x), \varphi(y) \in H'$ et donc $\varphi(x \star y^{-1}) = \varphi(x)\sharp(\varphi(y))^{-1} \in H'$ donc $x \star y^{-1} \in \varphi^{-1}(H')$.
   $\varphi^{-1}(H)$ est donc un sous-groupe de G.

$\square$

Remarque 2.35. *lorsque l'on veut montrer qu'un ensemble est muni d'une structure de groupe, on commence toujours par essayer de l'identifier comme image réciproque (ou directe) d'un sous-groupe d'un groupe bien connu par un morphisme.*

Définition 2.36. *1. On appelle noyau de φ, noté $\operatorname{Ker}\varphi$, l'image réciproque de $\{e'\}$ par φ, autrement dit l'ensemble des antécédents de e' par φ*

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}.$$

2. On appelle image de φ notée $\operatorname{Im}\varphi$, l'image directe de G par φ. Autrement dit

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in G\}.$$

Théorème 2.37. *Les noyaux et les images sont des sous-groupes respectivement de G et G'.*

Preuve:
Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe de G :

1. On a évidemment $\operatorname{Ker}\varphi \subset G$ et de plus $\varphi(e) = e'$ donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-ensemble non vide de G.
2. Soit $x, y \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors on a successivement

$$\begin{aligned} \varphi(x \star y^{-1}) &= \varphi(x) \sharp \varphi(y)^{-1} \\ &= e' \sharp e'^{-1} \\ &= e' \end{aligned}$$

Donc $x \star y^{-1} \in Ker\varphi$.
Donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe de G.

□

Remarque 2.38. *lorsque l'on veut montrer qu'un ensemble est muni d'une structure de groupe, on commence toujours par essayer de l'identifier comme noyau ou image d'un morphisme.*

Exemple 2.39. *$\mathcal{U}$ est le noyau du morphisme « module », de $(\mathbf{C}^*, \times)$ dans $(\mathbf{R}^*, \times)$.*

Proposition 2.40. *Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes, soit $x, y \in G$. Alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement si $x \star y^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$.*

Preuve:
$\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement si $\varphi(x) \sharp \varphi(y)^{-1} = e'$ si et seulement si $\varphi(x \star y^{-1}) = e'$. □

Théorème 2.41.
1. *φ injectif si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.*
2. *φ surjectif si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = G'$.*

Preuve:

1. On montre l'implication et sa réciproque :
"$\Rightarrow$" Supposons φ injectif. Alors e' a au plus un antécédent par φ. Or $\varphi(e) = e'$ donc il en a au moins un : e. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.
"$\Leftarrow$" Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$ et montrons que φ est injectif. Soit $(x, y) \in G^2$ vérifiant $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors on a succesivement

$$\begin{aligned}\varphi(x \star y^{-1}) &= \varphi(x)\sharp\varphi(y)^{-1} \text{ car } \varphi \text{ est un morphisme}\\ &= \varphi(x)\sharp\varphi(x)^{-1}\\ &= e'\end{aligned}$$

Donc $x \star y^{-1} \in Ker\varphi$, donc $x \star y^{-1} = e$, donc $x = y$.

□

Remarque 2.42. *Pour montrer qu'un morphisme est injectif, on utilisera TOUJOURS le noyau et JAMAIS (ou presque) la méthode classique pour des fonctions quelconques : c'est beaucoup plus rapide !*

Chapitre 3

Espace vectoriel

3.1 Espace vectoriel

L'ensemble $\mathbf{K}$ désigne toujours $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 3.1. *On appelle* $\mathbf{K}$-espace vectoriel *(ou* espace vectoriel sev $\mathbf{K}$*) tout ensemble non vide E muni d'une loi de comoposition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

telles que :

(1) $(E, \star)$ *est un groupe abélien ;*

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda + \mu).x = \lambda.x \star \mu.x$ *;*

(3) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x \star y) = \lambda.x \star \lambda.y$ *;*

(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$ *;*

(5) $\forall x \in E$, *on a* $1.x = x$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs *; et les éléments de* $\mathbf{K}$ *sont appelés* scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemple 3.2. *(1) L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*

(2) $(\mathbf{K}, +, \times)$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*

(4) Sur $\mathbf{R}^2$*, on définit les deux lois suivantes : pour* $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(x, y) \oplus (x', y') := (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \otimes (x, y) := (\lambda \times x, \lambda \times y)$$

alors $(\mathbf{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel.*

(5) *Plus généralement : Si* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *sont* n *espaces vectoriels, alors l'espace produit* $E := E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *est un espace vectoriel pour les lois suivantes : Pour tous* $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ *et* $\lambda \in \mathbf{K}$*, on définit*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \otimes (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \ldots, \lambda \times x_n).$$

(6) *L'ensemble* $(\mathbf{K}_n[X], +, \times)$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à* n *additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.*

Proposition 3.3. *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ *et pour tout* $x, y \in E$*, on a :* $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$*.*

3.2 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

3.2.1 Définition

Définition 3.4. *Soit* F *un sous-ensemble de* E*. On dit que* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si* F *possède les propriétés suivantes :*

(1) $0_E \in F$ *;*

(2) $\forall x, y \in F$*,* $x \star y \in F$*. Autrement dit* F *est stable par l'addition ;*

(3) $\forall x \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda.x \in F$*. Autrement dit,* F *est stable par la multiplication par scalaire.*

Remarque 3.5. *Tout sous-espace vectoriel de* E*, est un espace vectoriel pour les lois induites par* E*.*

Exemple 3.6. (1) *Si* E *est un espace vectoriel, alors* $\{0_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriel de* E*.*

(2) *Si* $E = \mathbf{R}^2$*, alors* $F = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. De même, si* $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$*, alors* $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0); \lambda \in \mathbf{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

(3) *L'ensemble* $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$ *est un sous-esapce vectoriel de* $\mathbf{R}^3$*.*

(4) $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^n$*. En effet* $\mathbf{R}_n$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel de vecteur nul* $0 = (0, \ldots, 0)$*.* $H \subset \mathbf{R}_n$ *et* $0 = (0, \ldots, 0) \in H$ *car* $0 + \cdots + 0 = 0$*. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *et* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in H$*. On a* $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$*. Or* $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = 0$ *car* $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 0$ *puisque* $x, y \in H$ *donc* $\lambda x + \mu y \in H$*.*

Corollaire 3.7. *Soit* $(E, \star, .)$ *un espace vectoriel et* F *un sous-ensemble de* E *(*$F \subset E$*). Si* F *vérifie les propriétés* (1) *et* (2) *suivantes alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *:*

(1) F *est non vide (*F *contient l'élément neutre de* E*).*

(2) $\forall (x, y) \in F \times F, \forall \lambda \in \mathbf{K}$, *alors* $\lambda.x \star y \in F$.

Exemple 3.8. *Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^2$ *:*
— $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul;*
— $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition;*
— $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \in \mathbf{Z}\}$ *car non stable par produit extérieur.*

Proposition 3.9. *Soient* $(E, \star, .)$ *un espace vectoriel et* $E_1, \dots, E_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E*, alors l'intersection* $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Preuve:
Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors pour tout i, on a $\lambda.x \star \mu.y \in E_i$ donc $\lambda.x \star \mu.y$ est dans l'intersection de tout les E_i. □

Remarque 3.10. *La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.*
En effet, si $(E, \star, .) = (\mathbf{R}^2, \oplus, \otimes)$*, les sous-ensembles :*

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

et

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ *mais* $E_1 \cup E_2$ *n'est pas un sous-espace vectoriel.*
Car par exemple, soient $x, y \in \mathbf{R}^*$*, on a* $(x, -x) \in E_1$ *et* $(y, y) \in E_2$ *mais* $(x, -x) \oplus (y, y)$ *n'appartient ni à* E_1 *ni à* E_2*.*

3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel

3.3.1 Combinaisons linéaires

Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$. Tout vecteur de E de la forme $a_1.x_1 + \star \dots a_p.x_p = \sum_{k=1}^{p} a_k.x_k$, où les $a_k \in \mathbf{R}$ est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $x_k, k = 1 \dots, p$.

Remarque 3.11. *On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.*

3.3.2 Définitions et propriétés

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel $(E, \star, .)$. On note $\mathrm{vect}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. On a donc

$$\mathrm{vect}(A) = \{\textstyle\sum_{a \in A} \lambda_a.a \mid (\lambda_a) \text{ est une famille de scalaires à support fini}\}.$$

Donc un élément x de E appartient à $\mathrm{vect}(A)$, si et seulement si, il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tels que : $x = \lambda_1.x_1 \star \dots \star \lambda_n.x_n$.

Théorème 3.12. *Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$. $\mathrm{vect}(A)$ est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

(1) $A \subset \mathrm{vect}(A)$,

(2) $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant A.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(A)$ se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, on l'appelle espace vectoriel engendré par A.

Corollaire 3.13. $\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire 3.14. *A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\mathrm{vect}(A) = A$.

Exemple 3.15. *(1)* $\mathrm{vect}\{$*ensemble vide*$\} = \{0_E\}$ *car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.*

(2) $\mathrm{vect}(E) = E$ *car* $\mathrm{vect}\, E$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant E.*

(3) Soit $A = \{u\}$. Montrons que $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$.
Puisque $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ et puisque $\mathrm{vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel on a $\lambda u \in \mathrm{vect}(A)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$.
Ainsi $\mathbf{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
Par double inclusion on obtient $\mathbf{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$.

(4) Soit $A = \{u, v\}$. Par double inclusion, on montre comme ci-dessus que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$.

Proposition 3.16. *Si A et B deux parties de E alors* $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(B) \subset \mathrm{vect}(A)$.

Preuve:
Supposons que $A \subset B$. On a alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$. □

Proposition 3.17. *Si A et B sont deux parties de E alors* $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Exemple 3.18. *Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.* $\mathrm{vect}(F \cup G) = F + G$. *Ainsi $F + G$ apparait comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.*

3.4 Famille de vecteurs

3.4.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition 3.19. *On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ tout vecteurs x de E pouvant s'écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires de $\mathbf{K}$ bien choisis.*

Définition 3.20. *On appelle espace vectoriel engendré par la famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$*, le sous-espace vectoriel engendré par la partie* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*. On le note* $\mathrm{vect}\,\mathcal{F}, \mathrm{vect}(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *ou* $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$*.*

Exemple 3.21. *Le sous-espace vectoriel engendré par la famille vide est l'espace nul* $\{0_E\}$*.*

Théorème 3.22. *Si* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille de vecteurs de* E *alors* $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$*, c'est-à-dire :*

$$\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

Exemple 3.23. *(1) Cas* $n = 1$*,* $\mathrm{vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$*.*

(2) Cas $n = 2$*,* $\mathrm{vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$*.*

(3) Dans $\mathbf{R}^3$*, considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$*.*
$\mathrm{vect}(u, v) = \{(\lambda, \lambda + \mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$.

Remarque 3.24. *Il est efficace d'établir qu'une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendré par une famille de vecteurs.*

Exemple 3.25. *(1) Dans* $\mathbf{R}^3$*, considérons* $P = \{(a + b, a - b, 2b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$*. Puisque* $P = \mathrm{vect}(u, v)$*, avec* $u = (1, 1, 0)$ *et* $v = (1, -1, 2)$*,* P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^3$*.*

(2) Dans $\mathbf{R}^3$*, considérons* $P = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$*.*
Puisque $x + y - z = 0 \leftrightarrow z = x + y$*, on a* $P = \mathrm{vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$*. ainsi* P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^3$*.*

3.4.2 Famille génératrice

Définition 3.26. *On dit qu'une famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de vecteurs de* E *est génératrice de* E*, si tout vecteur* x *de* E *s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $\mathcal{F}$*, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Remarque 3.27. *La famille* $\mathcal{F}$ *est génératrice de* E*, si et seulement si,* $\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = E$*.*

Exemple 3.28. *(1) Dans* $E = \mathbf{R}^n$*, on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ *où* 1 *se situe en ième position. La famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est génératrice de* $\mathbf{R}^n$*. En effet,* $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$*, on peut écrire* $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$*.*

(2) Dans $E = \mathbf{R}$*, la famille* (1) *est génératrice. En effet,* $x \in \mathbf{R}$*,* $x = x.1$*.*

(3) Dans $E = \mathbf{C}$ *vu comme* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel, la famille* $\mathcal{F} = (1, i)$ *est génératrice. En effet, pour tout* $z \in \mathbf{C}$*, on peut écrire* $z = a.1 + b.i$*, avec* $a = \Re(z)$ *et* $b = \mathrm{Im}(z)$*.*

Proposition 3.29. *Si* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *est une famille génératrice et si* $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *alors la sous-famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est génératrice.*

3.4.3 Famille libre, famille liée

Définition 3.30. *Un vecteur u est dit colinéaire à un vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $u = \alpha v$. Deux vecteurs u et v sont dits colinéaires si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attension

u est colinéaire à v n'équivaut pas à v est colinéaire à v. En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteurs mais tout vecetures n'est pas colinéaire au vecetur nul.

Définition 3.31. *(1) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est libre si elle vérifie $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \to \lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$. On dit que les veceturs $e_1, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants.*

(2) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée si elle n'est pas libre ce qui signifie $\exists \lambda_1, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.

Exemple 3.32. *Soit $u \in E$, étudions la liberté de la famille (u). Si $u \neq 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Par suite, la famille (u) est libre.*
Si $u = 0$ alors on peut écrire $\lambda u = 0$ avec $\lambda = 1 \neq 0$. Par suite, la famillle (0) est liée.

Proposition 3.33. *Soient $n \geq 2$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On a une équivalence entre :*

(i) $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée ;

(ii) L'un des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ est combinaison linéaire des autres.

Exemple 3.34. *(1) Soient $u, u \in E$.*
(u, v) est liée, si et seulement si, $(\exists \alpha \in \mathbf{K}^*, u = \alpha v)$ ou $(\exists \beta \in \mathbf{K}^*, v = \beta u)$. Ansi, la famille (u, v) est liée, si et seulement si, u et v sont colinéaires.

(2) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Aprés résolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

(3) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Aprés la résolution du système, on obtient $\alpha u+\beta v+\gamma w=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2\beta \\ \gamma=-\beta. \end{cases}$ *On en déduit que la famille* $\mathcal{F}$ *est liée car on a notament la relation linéaire* $-2u+v-w=0$.

(4) *Dans* $E=\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, *considérons les fonctions* $f: x \mapsto 1, g: x \mapsto cos(x), h: x \mapsto sin(x)$ *et montrons que la famille* (f,g,h) *est libre. Soient* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ *Supposons* $\alpha f+\beta g+\gamma h=0$. *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *on a :* $\alpha+\beta cosx+\gamma sinx=0$. *Pour* $x=0$, *on obtient l'équation* $\alpha+\beta=0(1)$. *Pour* $x=\Pi/2$, *on obtient l'équation* $\alpha+\gamma=0(2)$. *Pour* $x=\Pi$, *on obtient l'équation* $\alpha_\beta=0(3)$. *On a :* (1) *et* (3) *donnent* $\alpha=\beta=0$ *et par* (2) *on obtient* $\gamma=0$. *Finalement la famille* (f,g,h) *est libre.*

Remarque 3.35. *(1) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

(2) Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

(3) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition 3.36. *Si* $(e_1,\ldots,e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1,\ldots,e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1,\ldots,e_n,e_{n+1})$ *est libre.*

3.4.4 Base d'un espace vectoriel

Définition 3.37. *On dit qu'une famille* $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}=(e_1,\ldots,e_n)$ *de vecteurs de* E *est une base de* E *si celle-ci est libre et génératrice.*

Exemple 3.38. *(1) Dans* $E=\mathbf{K}^n$, *on pose* $e_i=(1,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\in\mathbf{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position. On a déja vu que* $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ *est génératrice de* $\mathbf{K}^n$ *; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{K}$. *Supposons que* $\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0$. *On a* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(0,\ldots,0)$ *et donc* $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. *Finalement , la famille* $\mathcal{B}$ *est libre et génératrice de* $\mathbf{K}^n$, *c'est une base de* $\mathbf{K}^n$.

(2) Considérons la famille $(1,i)$ *déléments du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$. *On a déja vu que cette famille est génratrice ; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$. *Supposons que* $\lambda.1+\mu.i=0$. *En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient* $\lambda=\mu=0$. *Finalement, la base* $\mathcal{B}$ *est libre est génératrice du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$, *c'est une base de* $\mathbf{C}$.

Remarque 3.39. *La famille* $(1,i)$ *est liée dans le* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$. *Elle n'est pas donc une base du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$.

Théorème 3.40 (Théorème de la base extraite)**.** *De toute famille génératrice finie de* E, *on peut extraire une base de* E. *En particulier, un espace de dimension finie admet une base.*

Théorème 3.41 (Théorème de la base incomplète)**.** *Si* E *est de dimension finie, alors toute famille libre de* E *peut-être complétée en une base de* E. *Pour la compléter, il suffit de considérer certains vecteurs d'une famille génératrice de* E.

En particulier, on déduit des résultats précédents que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Théorème 3.42 (Théorème et définition)**.** *Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre s'appelle la dimension de E et est noté* $\dim(E)$.

Corollaire 3.43. *Si E est de dimension n et si $(x_1 \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E ;*
2. *$(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille génératrice de E ;*
3. *$(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.*

Remarque 3.44.

1. *En particulier, dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus $n$éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.*
2. *Si E et F sont de dimension finie, alors $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$. En particulier, $\dim(\mathbf{K}^n) = n$.*
3. *Si E et F sont de dimension finie, alors $dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times dim(F)$.*
4. $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n + 1$.

Définition 3.45. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, on appelle rang de $(x_1, \ldots, x_n)$ la dimension de $F = \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Lemme 3.46. *Dans un espace engendré par n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$, toute famille $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ de $n + 1$ vecteurs est liée.*

Lemme 3.47. *Le cardinal d'une famille libre est plus petit que celui d'une famille génératrice Si $\mathcal{F}_1$ est une famille libre et $\mathcal{F}_2$ une famille génératrice de E, on a*

$$\mathrm{card}(\mathcal{F}_1) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{F}_2)$$

Remarque 3.48. *Soit E est $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.*
2. *Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, on a : $\mathrm{card}\,\mathcal{F} \leqslant \dim E$*
3. *Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E, on a : $\mathrm{card}\,\mathcal{F} \geqslant \dim E$*

Proposition 3.49. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.*

3.4.5 Composante dans une base

Théorème 3.50. *Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de E alors $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$.*

Définition 3.51. *Avec les notations ci-dessous, les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés les composants de x dans la base $\mathcal{B}$ (ou encore les composantes de x).*

Remarque 3.52. *Les composantes d'un vecteur dépendant de la base dans laquelle on travaille.*

Exemple 3.53. *(1) Dans $E = \mathbf{K}^n$, considérons la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$. Puisque $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, les composantes du vecteurs x dans la base $\mathcal{B}$ sont les saclaires $x_1, \dots, x_n$.*

(2) Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, les composantes de $z \in \mathbf{C}$ dans la base canonique $(1, i)$ sont $\Re(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$

Théorème 3.54. *Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E alors pour tout vecteur x et y de composantes $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathcal{B}$, les composantes de $x + y$ sont $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ et celle de λx sont $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$.*

3.5 Somme, Somme directe, sous-espaces vectoriels supplémentaires

3.5.1 Introduction

La réunion de deux sous-espaces n'est pas en général un sous-espace, sauf cas très particulier. L'opération d'addition permet de définir la somme de deux sous-espaces ; cette somme s'avère être en fait le plus petit sous-espace contenant leur réunion. La propriété d'unicité de l'écriture d'un vecteur comme somme de vecteurs appartenant à deux sous-espaces donnés conduit à la notion de somme directe et de sous-espaces supplémentaires.

3.5.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 3.55. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E : On appelle somme de F et de G l'ensemble, noté $F + G$; des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F + G = \{u \in E \mid u = f + g, f \in F, g \in G\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $F + G$ sont caractérisés par

$$u \in F + G \Longleftrightarrow \exists f \in F, \exists g \in G \text{ tels que } u = f + g.$$

Remarque 3.56. *La somme $F + G$ des sous-espaces vectoriels F et G est donc est un ensemble. Cet ensemble contient F. En effet, si $f \in F$, alors $f = f + 0_E \in F + G$ car $0_E \in G$: Ainsi $F \subset F + G$.*

Théorème 3.57. *La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve:
$F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$; avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$: en effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$; puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Si u et v sont dans H et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$; avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G. Alors $\lambda u + \mu v = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu u g_2)$. Or F est un sous-espace vectoriel de E ; donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$. De même, $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$. Ainsi $\lambda u + \mu v 2 \in F + G$. $\square$

Exemple 3.58. *Soient $u_1; u_2; u_3$ trois vecteurs de l'espace vectoriel E.*
Que peut-on dire de la somme $\text{vect}(u_1; u_2) + \text{vect}(u_3)$*? On a*

$$u \in \text{vect}(u_1; u_2) + \text{vect}(u_3) \Longleftrightarrow \exists f \in \text{vect}(u_1; u_2); \exists g \in \text{vect}(u_3); \text{ tels que } u = f + g.$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned} f \in \text{vect}(u_1; u_2) &\Longleftrightarrow \exists (a_1; a_2) \in \mathbf{K}^2 \text{ tel que } f = a_1u_1 + a_2u_2 \text{ et } g \in \text{vect}(u_3) \\ &\Longleftrightarrow \exists a_3 \in \mathbf{K} \text{ tel que } g = a_3u_3. \end{aligned}$$

On en déduit donc finalement que

$$\begin{aligned} u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3) &\Longleftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{K}^3 \text{tel que } u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \\ &\Longleftrightarrow u \in \text{vect}(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3) = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$.

3.5.3 Somme directe des sous-espaces vectoriels

Définition 3.59. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E : On dit que la somme $F + G$ est directe si tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Lorsque F et G sont en somme directe, on note $F+G = F \oplus G$. Pratiquement, les sous-espaces vectoriels en somme directe sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème 3.60. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$F + G \text{ est directe } \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Preuve:
Supposons la somme $F+G$ directe. Soit $u \in F \cap G$. On peut alors écrire $u = 0_E + u$; avec $0_E \in F$ et $u \in G$ et on a aussi $u = u + 0_E$ avec $u \in F$ et $0_E \in G$. Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $u = 0_E$. Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Mais l'inclusion inverse est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe. Supposons que l'on ait

$$u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2,$$

avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G. Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$. Puisque $F \cap G = \{0_E\}$, on a donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0_E$, ce qui assure que $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$, Ainsi, l'écriture de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, ce qui signife que la somme $F + G$ est directe. □

Exemple 3.61. *Deux droites sécantes en vecteur nul du plan $\mathbf{R}^2$ ou de l'espace $\mathbf{R}^3$ sont en somme directe puisque leur intersection est réduite au vecteur nul. Deux plans sécants de l'espace $\mathbf{R}^3$ ne peuvent être en somme directe puisque leur intersection est une droite et ne contient donc pas que le vecteur nul.*

3.5.4 Sous-espaces vectoriels supplémenatires dans un espace vectoriel

Définition 3.62. *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si la somme $F+G$ est directe et si celle-ci vaut E. On a donc :*

$$(F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E) \Leftrightarrow E = F \oplus G.$$

On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E.

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

Théorème 3.63. *Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalents :*

(1) F et G sont supplémentaires dans E.

(2) Pour tout $u \in E$; il existe un couple unique de vecteurs $f \in F$ et $g \in G$ et tels que $u = f + g$.

(3) $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(4) Si B_F est une base de F et Si B_G est une base de G alors $B = B_F \cup B_G$ est une base de E.

Remarque 3.64. *Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre. Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbf{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbf{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $\mathcal{P} = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier*

Remarque 3.65. *Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires. Par exemple, si $D_1; D_2; D_3$ sont trois droites deux à deux sécantes en $\{(0,0)\}$ de $E = R^2$, alors D_2 et D_3 sont des supplémentaires de D_1 dans $\mathbf{R}^2$ puique $\dim D_1 + \dim D_2 = \dim \mathbf{R}^2 = 2$ et $\dim D_1 + \dim D_3 = \dim \mathbf{R}^2$ et $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = \{(0,0)\}$.*

Exemple 3.66. *Soit $E = \mathbf{R}^3$. On demande de vérifer que $F = \{(x;y;z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x;x;x) \in \mathbf{R}^3\}$ sont supplémentaires dans E.*
On montre d'abord que $F = \mathrm{vect}((1,1,0),(0,1,1))$. F est donc un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. De même $G = vect((1,1,1))$ est une droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ est donc un sous-espace vectoreil de $\mathbf{R}^3$.
Une méthode pour montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$; est de vérifier que tout vecteur $u = (x_1;x_2;x_3)$ de $\mathbf{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur $f = (f_1;f_2;f_3)$ de F et d'un vecteur $g = (g_1;g_2;g_3)$ de G.
Nous devons donc résoudre l'équation $u = f + g$, d'inconnues f et g et montrer qu'elle admet une solution unique.
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1; f_1 + f_3; f_3)$.
De même $g \in G \iff g = (g_1;g_1;g_1)$. On a donc :

$$x = f + g \iff \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_1 + g_1 + f_3 = x_2 \\ f_3 + g_1 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_3 - f_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

On voit donc que ce système admet une unique solution donnée par :

$$\begin{cases} f_1 = x_1 - g_1 = x_2 - x_3 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

Ceci signifie donc que les vecteurs f et g recherchés existent et qu'ils sont uniques. On a bien prouvé que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Exemple 3.67. *Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$: Vérifier que $F = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f$ est paire et $G = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid festimpaire\}$ sont supplémentaires dans E. On a déjà vu que F est un sous-espace vectoriel de E. On prouve de même que G est un sous-espace vectoriel de E. Il nous reste à vérifier que tout élément de E se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G ; ce qui revient à prouver que toute fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ peut s'écrire d'une seule façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Contrairement à l'exemple précédent, ceci ne débouche pas sur un système d'équations à résoudre. Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse. Analyse du problème : Supposons que l'on puisse écrire $f = p + i$ avec p paire et i impaire, et essayons d'exprimer p et i en fonction de f. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a d'abord $f(x) = p(x) + i(x)$. Puisque $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$; on a aussi, pour tout réel x, on a $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En ajoutant et soustrayant membre à membre $f(x)$ et $f(-x)$; il vient*

$$p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Cette analyse du problème nous permet donc de conclure que, si la décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est possible, alors celle-ci est unique puisqu'on a trouvé une seule valeur posible de $p(x)$ et de $i(x)$: Il nous reste simplement à vérifier que les fonctions données répondent bien aux exigences du problème posé, c'est-à-dire que p est paire, que i est impaire et que $p + i = f$: Synthèse du problème : Partant de f fonction quelconque de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; soient p et i définies par :

$$p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

On a bien $p(x) + i(x) = f(x)$; c'est-à-dire $f = p + i$. De plus, on a $p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = p(x)$; donc p est paire. On vérifie de même que i est impaire. Ainsi, F et G sont supplémentaires dans E.

Proposition 3.68. *Tout sous-espace d'un espace de dimension finie admet un supplémentaire.*

Théorème 3.69 (Formule de Grassmann)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F,G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim(F) + dim(G)$.