Chapitre 1

Systèmes linéaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire et de résoudre des systèmes de n équations à p inconnues. La technique principale, appelée méthode du Pivot de Gauss est très importante et on s'en servira beaucoup, notamment dans le cadre de l'algèbre linéaire (et donc des matrices).

1.1 Introduction

Définition 1.1. *On appelle système linéaire* (S) *de* n *équations à* p *inconnues un système d'équations de la forme*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & = & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ *sont des nombres réels fixés appelés coefficients du système et les* $(bi)_{i=1,\ldots,n}$ *sont des réels fixés qui constituent le second membre du système. Les* $x_1, \ldots, x_p$ *sont les* p *inconnues du sytème.*
Par commodité, chaque équation est repérée par un nom : L_i *pour i-ème ligne.*
Une solution du système est un p-uplet $(x_1; x_2; \ldots; x_p)$ *pour lesquels toutes les équations sont vérifiées.*
Résoudre le système (S)*, c'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.*

Tout étudiant a déjà rencontré par exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquelles deux méthodes de résolution ont été présentées : par substitution ou combinaisons linéaires. On verra dans la suite qu'on va généraliser la méthode de combinaisons linéaires. On peut commencer par vérifier qu'on sait faire sans difficulté l'exercice suivant.

Définition 1.2. *Un système est dit :*

1. *compatible lorsqu'il admet au moins une solution, incompatible s'il n'en admet aucune ;*
2. *homogène lorsque le second membre est constitué uniquement de coefficients nuls. On appelle système homogène associé à un système* (S) *le système obtenu en gardant les mêmes coefficients et en remplaçant le second membre par des* 0 *;*

3. *de Cramer lorsque $n = p$ et lorsque le système possède une unique solution ;*
4. *triangulaire (ou échelonné) lorsqu'il est de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

5. *Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.*

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

1. Intervertir deux équations : ,
2. Intervertir l'ordre des inconnues,
3. Remplacer une équation par combinaisosns linéaires des autres équations.

1.2 Échelonner un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss

L'idée est de résoudre le système en combinant des lignes pour éliminer des coefficients, car ce genre d'opérations permet toujours de se ramener à un système équivalent à celui de départ.

Proposition 1.3. *Les opérations suivantes conduisent à un système équivalent au système précédent :* $(1)L_i \leftrightarrow L_j$ *: échanger les lignes i et j.*
$(2)L_i \leftarrow aL_i$*, où $a \in \mathbf{R}$: multiplier la ligne i par a.*
$(3)L_i \leftarrow L_i + bL_j$*, où $i \neq j, b \in \mathbf{R}$: ajouter b fois la ligne j à la ligne a.*
$(4)L_i \leftarrow aL_i + bL_j$*, où $i \neq j$, $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$: remplacer Li par $aL_i + bL_j$*

Étant donné un système d'équations linéaires, la méthode du pivot de Gauss a pour but est de construire un système échelonné qui soit équivalent au système donné ; les systèmes échelonnés sont, en effet, faciles à résoudre.

Un premier exemple

Pour expliquer cette méthode le plus simple est de commencer par un exemple. Considérons le système dont les inconnues sont x, y, z, t et où a, b sont des paramètres fixés.

$$\left[\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & & (E_1) \\ 2x & + & 4y & - & z & - & 5t & = & 5a & & (E_2) \\ -x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & b & & (E_3) \end{array}\right.\right]$$

Choisissons une équation avec un coefficient non nul pour la première inconnue x. Ici la première équation convient avec le coefficient 1, pour x, qu'on appelle le premier pivot. On va utiliser ce pivot de notre algorithme pour faire disparaître l'inconnue x des autres équations. Pour cela on ajoute à ces équations la première multipliée par un coefficient convenable. On obtient un système linéaire équivalent :

$$\left[\mathcal{S}'\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a \quad (E_1') = (E_1) \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a \quad (E_2') = (E_2) - 2(E_1) \\ & & & + & 2z & + & 2t & = & b+a \quad (E_3') = (E_3) + (E_1) \end{array}\right.\right]$$

Examinons maintenant le système obtenu en supprimant la première équation. On remarque que la variable x n'y apparaît pas. La variable suivante y non plus. On est ramené à un système de deux équations avec ici deux variables en moins. Choisissons notre deuxième pivot. On le trouve dans l'équation (E_2'). C'est le coefficient -3 de z. Nous allons l'utiliser pour éliminer z des équations suivantes (ici, il n'en reste qu'une). Réécrivons notre nouveau système :

$$\left[\mathcal{S}''\left\{\begin{array}{ccccccccl} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a \quad (E_1'') = (E_1') \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a \quad (E_2'') = (E_2') \\ & & & & & & 0 & = & b+3a \quad (E_3'') = (E_3') + \frac{2}{3}(E_2') \end{array}\right.\right]$$

Le système obtenu a la forme d'un escalier, avec deux grandes marches. On dit qu'on a échelonné le système.

Description de l'algorithme

Rappelons que le but est d'obtenir un système équivalent au système donné et qui soit échelonné c'est-à-dire de la forme :

$$\left[\left\{\begin{array}{lcccl} x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots & \dots & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \quad x_2 + & a_{2,3}x_3 + \dots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \quad\quad \ddots & & & & \\ & x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots & + & a_{p,n}x_n & = b_p \\ & & & 0 & = b_{p+1} \\ & & & & \ \vdots \\ & & & 0 & = b_m \end{array}\right.\right]$$

avec $1 \leq p \leq m$. Avec l'exemple précédent on peut comprendre facilement le fonctionnement de l'algorithme pour un système quelconque d'équations.

1. On cherche un pivot, premier coefficient non nul d'une certaine variable x_i dans une des équations. Par permutation, cette équation devient la première équation.
2. On utilise ce pivot et cette équation pour éliminer x_i des équations suivantes. Pour cela on ajoute cette équation multipliée par un coefficient convenable aux équations suivantes.
3. S'il y a des équations dont le premier membre est nul $0 = \dots$ on les place en dernier.

4. On recommence à l'étape 1 avec le système privé de la première équation.

L'algorithme s'arrête lorsqu'il ne reste plus que des équations $0 = \ldots$.

Proposition 1.4. *1. Un système échelonné possède des solutions si et seulement si les équations de compatibilité sont satisfaites (portant sur les données).*

2. Si ces conditions sont satisfaites alors toute donnée des inconnues non principales détermine une unique solution du système. C'est équivaut à dire les solutions du sytème sont paramétrées par les inconnues non principales :

Les inconnues des lignes non nulles s'appellent les inconnues principales, ou pivots

Exprimons plus en détails une des étapes de cet algorithme. L'objectif est d'obtenir, à l'issue de l'étape k un système de la forme $\mathcal{H}_k$ suivante :

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_{n_1} & + & a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} & + & \ldots & \ldots & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & & & x_{n_2} & + & a_{2,n_2+1}x_{n_2+1}+\ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & x_{n_k}+a_{k,n_k+1}x_{n_k+1}+\ldots & + & a_{k,n}x_n & = & b_k \\ & & & & & & 0+a_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1}+\ldots & + & a_{k+1,n}x_n & = & b_{k+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0+a_{m,n_k+1}x_{n_k+1}+\ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.\right],$$

avec $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq n$.

Décrivons à présent l'étape k de la méthode du Pivot de Gauss : étant donné un système de la forme $\mathcal{H}_{k-1}$, nous allons le transformer de façon à obtenir un système de la forme $\mathcal{H}_k$.

Nous noterons E_j la $j^{ème}$ équation du système.

— On ne modifie pas les $k-1$ premières équations du système linéaire.

— Si tous les coefficients $a_{l,m}$ (avec $l \geq k$ et $m > n_{k-1}$) sont nuls, alors, pour tout $l \geq k$, l'équation E_l s'écrit : $0 = b_l$. Le système a donc la forme voulue. L'algorithme s'arrête.

— Sinon, on pose $n_k := \min\{m \ : \ \exists l \geq k \ : \ a_{l,m} \neq 0\}$. Alors, quitte à échanger la ligne k avec une ligne $p \geq k$ (telle que $a_{p,n_k} \neq 0$), on se ramène au cas où a_{k,n_k} est non nul (ce sera notre pivot pour l'étape k).
On remplace alors l'équation E_k par $\frac{1}{a_{k,n_k}}E_k$ pour se ramener à : $a_{k,n_k} = 1$.

— Puis, pour tout $p > k$, on remplace E_p par $E_p - a_{p,n_k}E_k$ (afin d'éliminer les termes en x_{n_k} des équations $k+1, \ldots, m$).

— Le système d'équations linéaires ainsi obtenu est alors de la forme $\mathcal{H}_k$, l'étape k est finie.

Un autre exemple

Pour résoudre le système suivant dans $\mathcal{R}^4$, on veut échelonner ce système :

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 & (E_3) \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous allons utiliser la méthode précédente : à chaque étape, le pivot sera encadré. Les systèmes d'équations linéaires obtenus sont équivalents au système donné.

Il y a un terme en x dans la première équation, notre premier pivot de Gauss sera ce terme : nous l'utilisons pour éliminer les termes en x des autres équations

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{\mathrm{x}} & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E_3' = E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous oublions à présent la première ligne ; il n'y a pas de terme en y dans les équations E_2, E_3' et E_4 ; il y a un terme en z dans E_3' mais pas dans E_2 ; nous permutons donc les équations E_2 et E_3'

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E_2' = E_3') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'' = E_2) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Nous divisons la deuxième équation par 3 de sorte à avoir z au lieu de $3z$ dans la deuxième équation

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'' = \frac{1}{3}E_2') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'') \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.\right]$$

Le terme en z de la deuxième équation est notre nouveau pivot de Gauss ; nous l'utilisons pour éliminer les termes en z des équations situés en dessous

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & \boxed{\mathrm{z}} & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'') \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'') \\ & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E_4' = E_4 - 2E_2'') \end{array}\right.\right]$$

Nous oublions à présent la deuxième équation ; il y a un terme en t dans la troisième équation, nous divisons la troisième équation par 8 de sorte à avoir t à la place de $8t$ dans cette équation

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'') \\ & & & & & & t & & & = & \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E_4') \end{array}\right.\right]$$

Le terme en t de la troisième équation devient notre nouveau pivot de Gauss : nous l'utilisons pour éliminer les termes en t de la quatrième équation

$$\left[\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & = 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & = 0 & (E_2'') \\ & & & & & & \boxed{\text{t}} & = \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ & & & & & & u & = \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{array}\right.\right]$$

Ce système d'équations linéaires est échelonné et équivalent à notre système initial.

1.3 Rang d'une matrice

Définition 1.5. *Une matrice B est dite èchelonnèe en lignes si*

1. *chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente, et*
2. *les lignes nulles (ne contenant que des 0) de B viennent en bas après les lignes non nulles.*

Toute matrice A peut se réduire à une matrice échelonnée en lignes B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On appelle B la forme échelonnée en lignes de A.
Une des concepts fondamentaux dans l'algèbre linéaire est le rang d'une matrice. Il admet de plusieurs définitions équivalentes. En voici la première.

Définition 1.6. *Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note rgA.*

Exemple 1.7. *La matrice suivante A se réduit en sa forme échelonnée en lignes par les pivotages*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} L2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a $rgA = 3$. Pour la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $rg(C) = 2$.

Théorème 1.8. *Pour toute matrice A on a*
$rgA \leqslant$ nombre de lignes de A,
$rgA \leqslant$ nombre de colonnes de A.

Idée de la preuve. En réduisant la matrice A en une matrice échelonnée en lignes similaire à celle-ci

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les pivots (les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles) sont dans lignes distinctes et dans des colonnes distinctes. Donc on a
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de lignes de A,
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de colonnes de A.
Le nombre de pivots est aussi le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée de A, d'où
nombre de pivots $= rgA$.

1.3.1 La matrice des coefficients

On peut associer une matrice à chaque membre d'un système linéaire. Pour le système

$$\begin{cases} x - 3y + 6z + 2w & = & -1, \\ 2x - 5y + 10z + 3w & = & 0, \\ 3x - 8y + 17z + 4w & = & 1, \end{cases}$$

on a des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec A la matrice des coefficients regroupant les coefficients des variables du membre de gauche du système, et le vecteur colonne b contient le membre de droite. Quand on met les deux ensemble, on a la matrice augmentée quéon a déjà vue

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Le rang et les systèmes linéaires

On va étudier les systèmes linéaires en considérant le membre de gauche comme fixe, mais le membre de droite comme éventuellement variable. Dans cette optique, il est convenable de considérer le rang d'un syst'eme linéaire comme dépendant uniquement de son membre de gauche. D'où :

Définition 1.9. *Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice des coefficients A.*

Par exemple, le rang du système ci-dessus est 3, selon les calculs faits sur la page précédente.

1.4 Systèmes de Cramer

On peut donner des critères selon lesquels un système sera de Cramer.

Théorème 1.10. *Un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si la méthode du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots (non nuls).*

Théorème 1.11. *Un système est de Cramer si et seulement si son système admet une seule solution.*

Exercice . Pour quelles valeurs du paramètre λ le système suivant est de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + \lambda y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (\lambda - 5)z = 7 \end{cases}$$