Préing 1, MI5
Interrogation

Matière : **Algèbre II**	*Date :* **jeudi 23 mai 2024**
L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Durée :* **1h30**
	Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (Questions de cours)**. (3 pts)**

1. Donner la définition d'une famille de vecteurs linéairement indépendants et d'une famille liée.
2. Donner la formule de Grassmann.
3. Donner la formule du théorème de rang.

Exercice 2. (5 pts) Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base et dimension de $\mathrm{Im} f$.
2. En déduire dimension du noyau de f et déterminant de A.

Exercice 3. (7 pts) Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note

$$f(P) = (X^2 - 1)P" + (2X + 1)P'$$

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $\mathcal{C} = \{P_1 = 1, P_2 = 1 + 2X, P_3 = 1 - 2X - 4X^2\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.
5. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{P_2, P_3\}$
6. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier.

Exercice 4. (5 pts) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer déterminant de A.
2. Donner condition de m telle que A soit inversible.
3. Soit $m = 1$, donner l'expression de A^{-1}.