Interrogation MI5 Correction par Mathis S.

Exercice 1 :

1.

On dit qu'une famille de vecteurs est liée si l'un de ses vecteurs peut s'exprimer comme combinaisons linéaires des autres. Dans le cas contraire, il s'agit d'une famille de vecteurs linéairement indépendants.

2.

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel.

D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

3.

Soit E et F des espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(Im\, f) = \dim(\ker f) + rg(f)$$

Exercice 2 :

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Echelonnons la matrice A en lignes pour en déterminer son rang.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $rg(A) = 3$. $\mathrm{Dim}\big(Im(f)\big) = 3$

Une base de $Im(f)$ est formée des vecteurs des colonnes de A correspondant aux colonnes contenant les pivots dans la matrice échelonnée en lignes.

Soit $u_1 = (1,2,5,7), u_2 = (3,-1,1,7), u_3 = (5,-3,-1,9), u_4 = (-1,4,7,1)$

Alors une base de $Im(f)$ est (u_1, u_2, u_4)

<u>Complément :</u> On peut établir la relation de liaison via la matrice échelonnée : $u_3 = xu_1 + yu_2$ avec

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -7y = -13 \end{cases}$$

$$u_3 = \frac{13}{7}u_2 - \frac{4}{7}u_1$$

2.

D'après le théorème du rang,

$\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^4) - rg(f) = 4 - 3 = 1$

$\dim(\ker f) > 0$ donc f n'est pas bijective, donc A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$

<u>Exercice 3 :</u>

1.

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P' = b + 2cX$

$P'' = 2c$

$f(P) = 2c(X^2 - 1) + (2X + 1)(b + 2cX) = 2cX^2 - 2c + 2bX + 4cX^2 + b + 2cX$

$f(P) = (b - 2c) + (2b + 2c)X + 6cX^2$

$f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$

Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X], (a, b, c) \to a + bX + cX^2$

On a $\phi^{-1} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3, a + bX + cX^2 \to (a, b, c)$

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (a, b, c) \to (b - 2c, 2b + 2c, 6c)$

Alors ϕ, ϕ^{-1}, g sont des applications linéaires

$f = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ est une application linéaire.

f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

2.

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Dans ce cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3.

Si on écrit $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ est une base si et seulement si cette matrice est inversible.

Or, $\det\left(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = -8$

Donc cette matrice est inversible, $\mathcal{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$

4.

<u>Première méthode :</u> On calcule $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ et on les exprime dans la base $\mathcal{C}$

$f(P_1) = f(1) = 0$

$f(P_2) = f(1 + 2X) = 2 + 4X = 2P_2$

$f(P_3) = f(1 - 2X - 4X^2) = 6 - 12X - 24X^2 = 6P_3$

Pour déterminer la matrice D, on met les vecteurs $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ en colonnes avec leurs vecteurs exprimés dans la base $\mathcal{C}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Deuxième méthode :</u> On calcule les matrices de passage

Soit T la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculons T^{-1} en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = T^{-1}AT = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5.

$f(xP_1 + yP_2 + zP_3) = 0P_1 + 2yP_2 + 6zP_3$

$Im\, f = \{Q \in \mathbb{R}_2[X], \exists P \in \mathbb{R}_2[X], Q = f(P)\}$

$Im\, f = \{aP_1 + bP_2 + cP_3 \in \mathbb{R}_2[X], \exists (xP_1 + yP_2 + zP_3) \in \mathbb{R}_2[X], aP_1 + bP_2 + cP_3 = 2yP_2 + 6zP_3\}$

$Im\, f = \{2yP_2 + 6zP_3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

$Im\, f = \{y'P_2 + z'P_3, (y', z') \in \mathbb{R}^2\}$

$Im\, f = Vect\{P_2, P_3\}$

6.

Soit $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 \in \ker f$

$f(P) = DP = 0$

$\begin{cases} 2b = 0 \\ 6c = 0 \end{cases}$

$b = 0, c = 0$

$\ker f = \{aP_1, a \in \mathbb{R}\} = Vect\{P_1\}$

$\ker f$ et $Im\, f$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$

Hors P_1, P_2, P_3 est une famille libre donc

$\ker f \cap Im\, f = 0$

$\ker f + Im\, f = Vect\{P_1\} + Vect\{P_2, P_3\} = Vect\{P_1, P_2, P_3\} = \mathbb{R}_2[X]$

$\ker f$ et $Im\, f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$

<u>Exercice 4 :</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.

<u>Première méthode :</u> Echelonnement

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-2 & 2-m \\ 0 & -3 & 2-2m \end{vmatrix} = (m-2)(2-2m) + 3(2-m)$$
$$= 2m - 2m^2 - 4 + 4m + 6 - 3m = -2m^2 + 3m + 2$$

<u>Deuxième méthode :</u> Développement selon la première colonne

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 4 + m + 8 - 2m^2 = -2m^2 + 3m + 2$$

$$\det(A) = -2m^2 + 3m + 2$$

2.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Déterminons les valeurs de m telles que $\det(A) = 0$

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{4} = -\frac{1}{2} \ ou\ 2$$

A est inversible si et seulement si $m \neq -\frac{1}{2}$ et $m \neq 2$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$