Préing 1
Examen Analyse I

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date : 24 Janvier 2024* *Durée :* **2h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

∘ ∘ ∘

Exercice 1 (10 points)
Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des fonctions suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite. :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+7\ln(x)}{3x+2e^x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2+2|x-1|}{x-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x$.

Exercice 2 (6 points)

1. Donner la définition exacte, avec les quantificateurs, des propositions suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, où a et ℓ sont deux nombres réels.
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, où ℓ est un nombre réel.
2. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :
$$\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$
3. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :
$$\lim_{x\to 1} \frac{4}{5(x-1)^2}=+\infty.$$

Exercice 3 (6 points) Choisir deux des trois questions suivants.

Soit f la fonction définie sur $[-2,+\infty[\setminus\{7\}$ par
$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}.$$

(a) Étudier la continuité de f sur $[-2,+\infty[\setminus\{7\}$.

(b) Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en 7. Préciser la valeur prise en 7 par ce prolongement.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2.$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Quelle valeur doit-on donner à a pour que f soit prolongeable par continuité en 0. Justifier votre réponse.

Exercice 4 (6 points)

1. Énoncer le **Théorème des valeurs intermédiaires**.

2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f([a,b]) \subset [a,b].$$

Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = c.$$

3. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in I,\ |f(x)| = |g(x)| \neq 0.$$

(a) Montrer que la fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur I.

(b) À l'aide de la fonction ϕ en déduire que $f = g$ ou $f = -g$.