Préing 2 : Examen Final d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$

L'usage d'appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Mercredi 24 Janvier 2024** *Durée :* **2h** *Nombre de pages :* **1 page recto-verso**

Exercice 1 : Système d'EDPs d'ordre 1 (4 points)

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y\exp(xy+y^2) - (y+2x)\sin(xy+x^2) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + (x+2y)\exp(xy+y^2) - x\sin(xy+x^2) \end{cases}$$

1. Préciser, en justifiant, sur quel domaine ce système est résolvable.
2. Résoudre ce système.

1. Posons

$$g(x,y) = y\exp(xy+y^2) - (y+2x)\sin(xy+x^2)$$
$$h(x,y) = 2y + (x+2y)\exp(xy+y^2) - x\sin(xy+x^2)$$

Le système d'EDPs peut être résolu sur un domaine sur lequel g et h sont $\mathcal{C}^1$. Or g et h sont clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme, produit et composition de fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, $\exp(X)$ et $\sin(X)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tandis que $xy+y^2$ et $xy+x^2$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme polynome, d'où l'on déduit que $\sin(xy+x^2)$ et $\exp(xy+y^2)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus y et $y+2x$ sont trivialement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme et produit des fonctions $\mathcal{C}^1$ précédente. Il en va de même de h.(0.5 point)

2.

Etape 1 : Vérifions que $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$: (0.5 point)

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \exp(xy+y^2) + y(2y+x)\exp(xy+y^2) - \sin(xy+x^2) - (y+2x)x\cos(xy+x^2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \exp(xy+y^2) + y(x+2y)\exp(xy+y^2) - \sin(xy+x^2) - x(2x+y)x\cos(xy+x^2)$$

Etape 2 : Intégrons l'une des deux EDPs : (1 point)

Soit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\exp(xy+y^2) - (y+2x)\sin(xy+x^2)$$

alors

$$f(x,y) = \exp(xy+y^2) + \cos(xy+x^2) + K(y)$$

où K est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car $y \in \mathbb{R}$).

Etape 3 : On dérive f par l'autre variable :
Soit

$$f(x,y) = \exp(xy+y^2) + \cos(xy+x^2) + K(y)$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= (2y+x)\exp(xy+y^2) - x\sin(xy+x^2) + \frac{\partial K}{\partial y} \\ &= 2y + (x+2y)\exp(xy+y^2) - x\sin(xy+x^2)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 2y \qquad \text{(1 point)}$$

Etape 4 : On résoud l'équa diff précédente (0.5 point)

La solution de $\frac{\partial K}{\partial y} = 2y$ s'écrit

$$K(y) = y^2 + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Etape 5 : Solution : (0.5 point)

$$f(x,y) = \exp(xy+y^2) + \cos(xy+x^2) + y^2 + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : EDP d'ordre 1 (4.5 points)

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \neq \pm x, \ x \neq 0\}$ et φ le changement de variables de D défini par

$$\varphi(x,y) = (u,v) = \left(\frac{x+y}{x} \ ; \ x-y\right)$$

1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre D et V, en précisant V.
2. Déterminer f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D qui vérifie l'équation suivante :

$$\forall (x,y) \in D, \ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x+y)$$

1. Montrons que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de D dans V. Pour cela commençons par écrire proprement le changement de variables

$$\begin{array}{cccl}\varphi & : & D & \rightarrow & V = \mathbb{R}\backslash\{0;2\} \times \mathbb{R}\backslash\{0;2\} \\ & & (x,y) & \mapsto & (u,v) = \varphi(x,y) = \left(\frac{x+y}{x} \ ; \ x-y\right)\end{array}$$

   (a) φ est $\mathcal{C}^1$ sur D si et seulement si u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur D. Or $u(x,y) = (x+y)/x$ est $\mathcal{C}^1$ sur D comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annulle jamais sur D. De plus $v(x,y) = x-y$ est trivialement $\mathcal{C}^1$ sur D. (0.5 point).

(b) Nous allons maintenant montrer que φ réalise bien une bijection de D dans V.

$$\begin{cases} u = \frac{x+y}{x} \\ v = x - y \end{cases} \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y = ux \\ v = x-y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = (u-1)x \\ v = x-y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = (u-1)x \\ v = x - ux + x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = (u-1)x \\ v = (2-u)x \end{cases} \underset{u\neq 2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{(u-1)v}{2-u} \\ x = \frac{v}{2-u} \end{cases} \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

Ainsi φ réalise bien une bijection de D dans V et de plus

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} & : & V & \rightarrow D \\ & & (u,v) & \mapsto (x,y) = \varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{v}{2-u}\ ;\ \frac{(u-1)v}{2-u}\right) \end{array}$$

(c) φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur V si et seulement si les applications composantes x et y sont $\mathcal{C}^1$ sur V. Or ces deux applications sont $\mathcal{C}^1$ sur V comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais sur V. (0.5 point)

2. Passons maintenant à la résolution de l'EDP.

Introduisons la nouvelle fonction g qui dépend des variables u et v en posant

$$f = g \circ \varphi \Longleftrightarrow f(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g\left(\frac{x+y}{x}, x-y\right) \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

Calculons maintenant les dérivées partielles de f en fonction de celles de g

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

Injectons maintenant ces expressions dans l'EDP

$$\exp(x+y) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial u} + x\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{y}{x}\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v} = (x-y)\frac{\partial g}{\partial v}$$

on obtient donc

$$(x-y)\frac{\partial g}{\partial v} = \exp(x+y)$$

or $v = x - y$ et $x + y = uv/(2-u)$, donc

$$v\frac{\partial g}{\partial v} = \exp\left(\frac{uv}{2-u}\right) \underset{v\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{v}\exp\left(\frac{uv}{2-u}\right) \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

Notons alors

$$H(u,v) = K(u) + \int \frac{1}{v}\exp\left(\frac{uv}{2-u}\right) dv \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

où K est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0;2\}$.

Finalement

$$f(x,y) = g\left(\frac{x+y}{y}, x-y\right) = H\left(\frac{x+y}{x}, x-y\right) + K\left(\frac{x+y}{x}\right) \qquad \color{red}{(0.5 \text{ point})}$$

Exercice 3 : Résolution d'une EDP d'ordre 2 (8 points)

Soit φ le changement polaire dans $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Soit f une application de classe $\mathbb{C}^2$ sur A, et g l'application définie sur $\varphi^{-1}(A)$ par $g(r,\theta) = f \circ \varphi(r,\theta) = f(x,y)$.

1. Rappeler l'expression de $\varphi^{-1}(x,y)$ et l'ensemble $B = \varphi^{-1}(A)$.
2. Calculer l'expression de $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ en fonction de celles de f et uniquement des variables x et y.
3. Déterminer f de classe $\mathbb{C}^2$ sur A qui vérifie l'équation

$$\forall (x,y) \in A,\ xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + (x^2+y^2)\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

1. (0.5 point)

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} & : & A & \to B \\ & & (x,y) & \mapsto (r,\theta) = \varphi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right) \end{array}$$

2. Pour rappel :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Calcul des dérivées partielles de g :

<u>$\partial g/\partial r$:</u> (0.5 point)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

<u>$\partial g/\partial \theta$:</u> (0.5 point)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

<u>$\partial^2 g/\partial r^2$:</u> (1 point)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \cos(\theta)\Big[\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin(\theta)\Big[\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}\Big]\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$\underline{\partial^2 g/\partial\theta^2}$: (1 point)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\
&= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
&= -x\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$\underline{\partial^2 g/\partial r\partial\theta}$: (1 point)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right]\\
&= -\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= -\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\
&\qquad + \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
&= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

3. Prenons la dernière expression est multiplions-la par $\sqrt{x^2+y^2}$ (possible car $\neq 0$). On obtient alors

$$\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} = xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + (x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

Or, à droite, on reconnait une partie de l'EDP proposée. On a ainsi

$$\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} = xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + (x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2+y^2)\cos(\sqrt{x^2+y^2})$$

on déduit donc que

$$\sqrt{x^2+y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} = (x^2+y^2)\cos(\sqrt{x^2+y^2})$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\sqrt{x^2+y^2}) = r\cos(r)$$

Finalement, on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} = r\cos(r) \qquad \text{(2 points)}$$

qui a pour solution

$$g(r,\theta) = \Big[\cos(r) + r\sin(r)\Big] \times \theta + C \qquad \text{(1 point)}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Finalement

$$\begin{aligned} f(x,y) &= g\Big(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{Arctan}(y/x)\Big) \\ &= \Big[\cos(\sqrt{x^2+y^2}) + \sqrt{x^2+y^2}\sin(\sqrt{x^2+y^2})\Big] \times \mathrm{Arctan}(y/x) + C \qquad \text{(0.5 point)} \end{aligned}$$

Exercice 4 : Classe $\mathcal{C}^2$ (8.5 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f.

1.

Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: (0.5 point)
l'application f est $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

On doit maintenant calculer les dérivées partielles premières et secondes sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier qu'elles sont bien continues.

Dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{3x^2y^3(x^2+y^2) - 2x^4y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y^3 + 3x^2y^5 - 2x^4y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y^3 + 3x^2y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y^3(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(0.5 point)} \end{aligned}$$

Comme la fonction f est symétrique par permutation des x et des y, on sait que l'on peut obtenir $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)}$ en changeant tous les x en y et tous les y en x

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{3y^2x^3(x^2+y^2) - 2y^4x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^2x^3(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(0.5 point)} \end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

nous n'allons pas étudier la continuité de ces dérivées partielles en $(0,0)$ car d'après l'énoncé la fonction est $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$ ce qui implique bien la continuité des dérivées partielles premières.

Dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{(4x^3y^3+6xy^5)(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)(x^4y^3+3x^2y^5)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(4x^3y^3+6xy^5)(x^2+y^2)-4x(x^4y^3+3x^2y^5)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{6xy^7-2x^3y^5}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{(0.5 point)}
\end{aligned}$$

Même si on peut encore une fois obtenir $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)}$ par simple symétrie, je pense que la plupart des élèves feront le calcul explicite

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \frac{(6x^5y+4x^3y^3)(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(3x^5y^2+x^3y^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(6x^5y+4x^3y^3)(x^2+y^2)-4y(3x^5y^2+x^3y^4)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{6yx^7-2y^3x^5}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{(0.5 point)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} &= \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)}\\
&= \frac{x^2y^2(14x^2y^2+3x^4+3y^4)}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{(0.5 point)}
\end{aligned}$$

Calcul des dérivées secondes en $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(t,0)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\right] = 0 \quad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,t)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right] = 0 \quad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(t,0)} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right] = 0 \quad \text{(0.5 point)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,t)} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}\right] = 0 \quad \text{(0.5 point)}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que les 3 applications sont bien continues en $(0,0)$ c'est-à-dire que les applications dérivées secondes pour $(x,y)\neq(0,0)$ tendent bien vers 0. Pour cela, on peut passer en coordonnées polaires en posant $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \rho^2\Big[6\cos(\theta)\sin^7(\theta) - 2\cos^3(\theta)\sin^5(\theta)\Big] \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \qquad \text{(0.5 point)}$$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \rho^2\Big[6\sin(\theta)\cos^7(\theta) - 2\sin^3(\theta)\cos^5(\theta)\Big] \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} \qquad \text{(0.5 point)}$$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \rho^2\Big[\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)(14\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + 3\cos^4(\theta) + 3\sin^4(\theta)\Big] \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$$

(0.5 point)

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement f est bien $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{C}^2$ est une condition suffisante mais non nécessaire d'existence du gradient et de la matrice Hessienne. On peut donc calculer ces deux objets sur $\mathbb{R}^2$.

   Pour le gradient : (0.5 point)

$$\forall (x,y)\neq(0,0),\ \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} \end{pmatrix}$$

   tandis que

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice Hessienne : (0.5 point)

$$\forall (x,y) \neq (0,0),\ H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} \end{pmatrix}$$

Tandis que

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$