Cycle préparatoire $2^{\text{ème}}$ année **Devoir Surveillé**	
Matière : **Séries**	*Date* : **Lundi 23 janvier 2023**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1h 30mn**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :
   a) $a_n = \dfrac{n!}{3^{3n}\sqrt[3]{(3n)!}}$
   b) $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$
   c) $a_n = \left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n}$
   d) $a_n = \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}$
2. [Question Bonus]
   Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respéctifs R et R' telle que $|a_n| \le |b_n|$. Montrer que $R \ge R'$.

Exercice 2.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit **<u>la suite de fonctions</u>** $(f_n)_{n\ge1}$ sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = n^a x^n (1-x)$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\ge1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
2. Montrer que :
   a) $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n^a}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. (On pourra étudier les variations de la fonction f_n.)
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
   c) Pour quelles valeurs de a la suite $(f_n)_{n\ge1}$ converge-t-elle uniformément sur sur $[0,1]$?

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit **<u>la série de fonctions</u>** $\sum\limits_{n\ge1} f_n$ sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = n^a x^n (1-x)$$ $\sum (x)^n$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$. On notera dans la suite S la somme de cette série.
2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$.

   a) Calculer S sur $[0,1]$.

   b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
4. On suppose dans cette question que $a > 0$.

   a) Vérifier que pour $x \in [0,1]$, $a > 0$ et $n \geq 1$ on a :

   $$n^a x^n (1-x) \geq x^n (1-x)$$

   b) Déterminer un minorant du reste $R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{n+k}(x)$.

   c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.