CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 3**	
	Matière : **Mathématiques - Analyse** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 26 Janvier 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇ ◇ ◇

Exercice 1. (8 points) : Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des fonctions suivantes. Sinon, justifier pourquoi il n'y a pas de limite. :

1. $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$.

Solution : (2 points) Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = 0.
\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution : (2 points) Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} &\implies x - x^2 < x^2 \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \\
&\implies 0 = \lim_{x\to 0} x - x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x = 0 \\
&\implies \lim_{x\to 0} x^2 \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$

Solution : (2 points) Nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x}$.

Solution : (2 points) Nous avons

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = x+1 = 1.$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-x}{x} = x-1 = -1.$$

La limite n'existe donc pas.

Exercice 2. (4 points)

1. Donner la définition exacte, avec les quantificateurs, des propositions suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, où a est un nombre réel.

Solution : (1 point) Supposons a et ℓ sont des nombres réels. La limite de f en a est égal à ℓ, si et seulement si

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Solution : (1 point) La limite de f en $-\infty$ est égal à ℓ, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq B \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

2. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x+2}{x+2} = 3.$$

Solution : (2 points) Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $|x-2| < \delta$, on a

$$\left| \frac{5x+2}{x+2} - 3 \right| \leq \varepsilon.$$

Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\frac{5x+2}{x+2} - 3\right| \leq \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{5x+2}{x+2} - \frac{3x+6}{x+2}\right| \leq \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \left|\frac{x-2}{x+2}\right| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme nous cherchons la limite en 2, nous pouvons supposer $x > 0$, ce qui nous donne :

$$x > 0 \implies x + 2 > 2 \implies \frac{1}{x+2} < \frac{1}{2} \implies \left|\frac{x-2}{x+2}\right| < \frac{|x-2|}{2}$$

Ainsi pour avoir

$$\left|\frac{5x+2}{x+2} - 3\right| = 2 \cdot \left|\frac{x-2}{x+2}\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit d'avoir

$$2 \cdot \frac{|x-2|}{2} \quad = \quad |x-2| \leq \varepsilon$$

On peut donc choisir

$$\delta = \varepsilon,$$

pour conclure

$$\forall x > 0,\ |x-2| \leq \delta \quad \implies \quad \left|\frac{5x+2}{x+2} - 3\right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 3. (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}.$$

   (a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   Solution : (1 point) Les fonctions

$$x - 1 \quad \text{et} \quad x^3 - 1$$

   sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus la fonction $x^3 - 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Leur quotient

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}.$$

   définit donc une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Démontrer qu'on peut prolonger f par continuité en 1. Préciser la valeur prise en 1 par ce prolongement.

Solution : (2 points) En effectuant la division euclidienne de x^3-1 par $x-1$, on obtient

$$x^3 - 1 \ = \ (x-1)(x^2+x+1)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-1}{x^3-1} \ &= \ \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \ \frac{1}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 1} f(x) \ = \ \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}.$$

Comme la limite de f en 1 existe, nous pouvons prolonger f par continuité en 1 en définissant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1, \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Solution : La fonction

$$x - E(x)$$

est une fonction continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi la composition $x - E(x)$ avec $x \mapsto \sqrt{x}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et on peut dire le même de la fonction $E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Il ne nous reste que à étudier la continuité de f sur $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to n^-} E(x) + \sqrt{x - E(x)} \ &= \ \lim_{x\to n^-} n - 1 + \sqrt{x-(n-1)} \\ &= \ n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n - 1 + 1 = n. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to n^+} E(x) + \sqrt{x - E(x)} \ &= \ \lim_{x\to n^-} n + \sqrt{x-n} \\ &= \ n + \sqrt{n-n} = n. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to n^-} E(x) + \sqrt{x - E(x)} = f(n) = \lim_{x\to n^+} E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (7 points)

1. Énoncer le **Théorème des valeurs intermédiaires**. **(1 point)**
2. Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$, tel que
$$f(c) = g(c).$$

Solution : **(2 points)** Soit ϕ la fonction définie sur $[a, b]$ par :
$$\phi(x) = f(x) - g(x).$$

Alors
- ϕ est continue.
- De plus :

$$\begin{array}{rcl} f(a) \leq g(a) & \Longrightarrow & \phi(a) = f(a) - g(a) \leq 0 \\ f(b) \geq g(b) & \Longrightarrow & \phi(b) = f(b) - g(b) \geq 0. \end{array}$$

Ainsi
$$\phi(a) \leq 0 \leq \phi(b).$$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b]$, tel que :
$$\phi(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) - g(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) = g(c).$$

3. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

(a) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que
$$f(c) = c.$$

Solution : **(2 points)** Soit ϕ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
$$\phi(x) = f(x) - x.$$

Alors
- ϕ est continue.
- De plus :

$$\begin{array}{rcccl} f(0) \in [0, 1] & \Longrightarrow & 0 \leq f(0) & \Longrightarrow & \phi(0) = f(0) - 0 \geq 0. \\ f(1) \in [0, 1] & \Longrightarrow & f(1) \leq 1 & \Longrightarrow & \phi(1) = f(1) - 1 \leq 0. \end{array}$$

Ainsi
$$\phi(1) \leq 0 \leq \phi(0).$$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [0, 1]$, tel que :
$$\phi(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) - c = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(c) = c.$$

(b) En déduire que l'équation $\cos x = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.

Solution : (1 point) Nous avons

$$[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \cos([0,1]) \subset \cos\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = [0,1].$$

D'après la question précédente, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $\cos(c) = c$.

(c) En déduire qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+2}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ ax^3 - \cos(ax)\cdot x + \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases},$$

soit continue en $x = 1$.

Solution : (1 point) La fonction f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1) = a - \cos(a) + \frac{1}{2}.$$

si et seulement si

$$a - \cos(a) = 0.$$

Or d'après la question précédente, il existe $a \in [0,1]$ tel que $\cos(a) = a$.