Préing 1
Devoir Surveillé 3

Matière : **Algèbre**	*Date :* **lundi 5 juin 2023**
Le barème est donné à titre indicatif.	*Durée :* **1h30**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet comporte 2 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 :

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que :

$$g(1,0,0) = (3,1,0) \quad , \quad g(0,0,1) = (1,2,0) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(g) = \{(\lambda,\lambda,\lambda) \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1. Donner une base de $Ker(g)$ et sa dimension.
2. Donner V un supplémentaire de $Ker(g)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. En utilisant la définition de $Ker(g)$ déduire que $g(0,1,0) = (-4,-3,0)$. **Penser à**
$$(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1).$$
4. Donner la matrice $M_{\mathcal{B}_c}(g)$ de g dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$
$$\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$
5. Pour un quelconque $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, trouver l'expression analytique de $g(x,y,z)$.

Exercice 2 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \qquad f(x,y,z) = (2x, y+z, x+y+z)$$

1. Déterminer A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
$$\mathcal{B}_c = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$
2. Calculer $det(A)$. Est-ce que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$. Donner la dimension de $Ker(f)$ et le rang de f (dimension de $\mathrm{Im}(f)$ l'espace image de f).
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \bigoplus Im(f)$.

5. On considère la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (0, -1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer T la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

6. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$ la matrice P de $\mathcal{M}_3$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}_c$.

   On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_c$ la matrice P^{-1} de $\mathcal{M}_3$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_c$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Calculer la matrice P et la matrice P^{-1}.
   (b) Ecrire A en fonction de T, P et P^{-1}.
   (c) Recalculer la matrice P^{-1} par une autre méthode. (la méthode de Gausse-Jordan ou la méthode de comatrice).