	Préing 1 Devoir Surveillé 3	
CY TECH	*Matière :* **Analyse** ***Le barème est donné à titre indicatif.***	*Date :* **mardi 6 juin 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.
Le sujet comporte **3** *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (7 points)

A l'aide de l'intégration par parties ou d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 (2x-4)e^x \,\mathrm{d}x, \qquad B = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

1. Déterminer les réels a, b, tels que $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ pour tout $x > 1$.
2. Déterminer une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.
3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(S) \qquad x(x-1)y' - y = x$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle homogène (sans second membre) associée à (S).
   (b) Montrer que la fonction $g(x) = -1 + \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln(x-1)$ est une solution de (S).
   (c) En déduire la solution générale de (S).
4. Déterminer une solution y de (S) telle que $y(2) = 1$.

Exercice 3. (8 points)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

avec d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (sans second membre) associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{-2x}$.
3. Déterminer une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{2x}$.
4. Déterminer (en utilisant le principe de superposition) une solution particulière de (E) lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

5. En déduire la solution générale de (E) lorsque $d(x) = \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{4}$.