CY TECH	**Préing 2** **Devoir Surveillé 3**	
	Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 26 Janvier 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1.

1. Préciser, en justifiant, sur quel domaine ce système est résolvable.
2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} - y^2\sin(xy^2) + 2x\cos(x^2+y^2) + e^x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} - 2xy\sin(xy^2) + 2y\cos(x^2+y^2) + \dfrac{1}{y+1} \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et φ le changement de variables de D défini par $\varphi(x,y) = (u,v) = (x^2+y, x^2-y)$.

1. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme.
2. Trouver f de classe C^1 sur D qui vérifie l'équation suivante :

$$\forall (x,y) \in D, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = 16x^3y.$$

Exercice 3. Soit φ le changement de variables de $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $B = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ défini par $\varphi(x,y) = (u,v) = (y, \frac{x}{y})$. Soit f une application de classe C^2 sur A, et g l'application définie sur B par $f(x,y) = g \circ \varphi(x,y) = g(u,v)$.

1. Montrer que φ est un C^2-difféomorphisme et que g est de classe C^2.
2. Calculer l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en fonction de celles de g et uniquement des variables u et v.
3. Trouver f de classe C^2 sur A qui vérifie l'équation suivante :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy + 2y^3.$$

Exercice 4.

1. Soit la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe C^1 en $(0,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables.
Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(xy^2 g(x,y))$ est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.