Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -t & 1 \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer en fonction de t le déterminant de M. Déduire les déterminants de $2M$ et M^2.

   (b) Discuter le rang de M suivant les valeurs de t.

   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de t l'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $t = 1$.
Id désignera l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Donner l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

   (b) Déterminer le rang de f. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.