DS3 Algèbre 2 2022-2023

Sujet : DS3 2022 2023 DS-Algebre2 PREING1 S2 | Δhmed CyCours (deltahmed.fr)

Correction proposée par Mathis S.

Exercice 1 :

1.

$\ker g = \{\lambda(1,1,1) \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$

Soit $w = (1,1,1)$

$\ker g = Vect\big((w)\big)$

Alors (w) est une base de $\ker g$ et $\dim(\ker g) = 1$

2.

La famille $\big(w, (1,0,0), (0,0,1)\big)$ est une famille libre composée de 3 vecteurs, elle engendre donc $\mathbb{R}^3$

Ainsi, $V = Vect\big((1,0,0), (0,0,1)\big)$ est un supplémentaire de $\ker g$ dans $\mathbb{R}^3$

3.

$(1,1,1) \in \ker g$ donc $g(1,1,1) = 0$

$g(1,1,1) = g(1,0,0) + g(0,1,0) + g(0,0,1)$ car g est linéaire

$g(1,0,0) + g(0,1,0) + g(0,0,1) = 0$

$(3,1,0) + (1,2,0) = -g(0,1,0)$

$-(4,3,0) = g(0,1,0)$

$g(0,1,0) = (-4,-3,0)$

4.

$$M_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$g(x,y,z) = (x - 4y + z, -3y + 2z, 0)$

Exercice 2 :

1.

$$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

On développe selon la première ligne.

$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

La matrice A n'est pas inversible donc f n'est pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3.

Si $(x, y, z) \in \ker f$,

$$\begin{Bmatrix} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = -y \end{Bmatrix}$$

$\ker f = \{(0, y, -y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{y(0,1,-1), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = Vect\big((0,1,-1)\big)$

Posons $w = (0,1,-1)$

Alors (w) est une base de $\ker(f)$

$\dim(\ker f) = 1$

D'après le théorème du rang, $rg(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 2$

Pour trouver une base de $Im(f)$, nous devons extraire deux vecteurs libres des colonnes de $M_{\mathcal{B}_c}(f)$.

On pose $u = (2,0,1) \in Im(f)$ et $v = (0,1,1) \in Im(f)$. La famille (u, v) est libre, or $rg(f) = 2$, donc elle engendre $Im(f)$.

Alors (u, v) est une base de $Im(f)$.

4.

Soit $\mathcal{F}$ la famille (u, v, w)

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$rg\left(Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F})\right) = 3, Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F})$ est inversible donc $\mathcal{F}$ est libre.

$\mathcal{F}$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc elle engendre $\mathbb{R}^3$

Ainsi $\ker(f) + Im(f) = \mathbb{R}^3$

Or $\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus Im(f)$

5a.

$$Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg\left(Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})\right) = 3$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

5b.

$f(v_1) = f(0,-1,1) = 0$

$f(v_2) = (0,2,2) = 2v_2$

$f(v_3) = (4,-1,1) = (4,-2,0) + (0,1,1) = v2 + 2v_3$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5c.

La propriété est vérifiée pour $n = 1$

Supposons qu'elle est vraie pour $k \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $k + 1$

$$T^{k+1} = T(T^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^k & 2(k2^{k-1}) + 2^k \\ 0 & 0 & 2 \times 2^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

6a.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$e_2 = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

$$e_1 = \frac{v_3}{2} + \frac{e_2}{2} = \frac{v_3}{2} + \frac{v_2}{4} - \frac{v_1}{4}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6b.

$A = PTP^{-1}$

6c.

Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow 4L_1, L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{4}, L_2 \leftarrow \frac{L_2}{4}, L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$