	Préing 1 **Devoir Surveillé 3**	
	Matière : **Mathématiques - Analyse** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Lundi 24 Janvier 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x(x^2+\sqrt{x})} - \sqrt{x^3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{1-x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)}{5x+x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(\ln(x))}{x}$.
   Où $E(\ln(x))$ désigne la partie entière de $\ln(x)$.

Exercice 2.

1. Donner la définition exacte, avec les quantificateurs, des propositions suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, où a et ℓ sont des nombres réels.
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :

$$\lim_{x\to -5} \frac{x+5}{x-5} = 0.$$

   On pourra supposer $x \leq 0$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x}-x}{\sqrt{3x}+x}.$$

1. Étudier la continuité de f.

2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 par une fonction continue $\tilde{f}$. Déterminer $\tilde{f}$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{si } x > 3 \\ e^{ax} + ax & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
3. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que f est continue en $x = 3$.
   Indication : Pensez à appliquer le **TVI** à la fonction
   $$g(a) = e^{3a} + 3a - 2.$$

Exercice 5.

1. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. On considère la fonction
   $$g(x) = f(x) - 5x - 2x^2.$$
   (a) Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que
   $$f(c) = 5c + 2c^2.$$
2. Montrer que l'équation $x^2(\cos(x))^5 + x\sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.