CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 3** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date:* **Vendredi 21 Janvier 2022** *Durée:* **1h30** *Nombre de pages:* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante
$$(E) : z^5 = 1.$$
2. Placer les solutions de l'équation (E) dans le plan complexe.
3. Montrer que pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, nous avons
$$(X-a)(X-\overline{a}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(a)X + |a|^2.$$
4. Considérons le polynôme $P(X) = 5X^5 - 5$.
   (a) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(5a)$ en fonction de $\sin(a)$ et de $\cos(a)$.
   En déduire une expression de $\cos(5a)$ en fonction de $\cos(a)$.
2. À l'aide de la question précédente, montrer que
$$16\cos^5\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0.$$
3. L'objectif de cette question est de déterminer les racines du polynôme
$$P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X + 1.$$

   (a) Trouver une racine rationnelle évidente de $P(X)$.
   (b) Soit α cette racine. Effectuer la division euclidienne de P par $(X-\alpha)$.
   (c) Vérifier que $Q(X) = (4X^2 - 2X - 1)^2$.
   (d) Déterminer les racines du polynôme $P(X) = 16X^5 - 20X^3 + 5X + 1$.

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 3
On considère les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$P(X) = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16 \qquad ; \qquad Q(X) = X^2 + 2X + 2.$$

1. Justifier que le polynôme Q est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les racines du polynôme Q.
3. Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[x]$.
4. Montrer que -2 est une racine de P.
5. Déterminer l'ordre de multiplicité de -2 dans P.
6. Soit m l'ordre de de multiplicité de -2 dans P. Écrire la division euclidienne de P par $(X+2)^m$?
7. Donner la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[x]$.

Exercice 4
Soit $w = 1 - \sqrt{2} + i$

1. Calculer la forme algébrique et exponentielle du nombre complexe w^2.
2. Calculer le discriminant du polynôme

$$\sqrt{2}X^2 - (\sqrt{2} + 1 + i)X + (1 + i).$$

   En déduire la forme algébrique des deux nombres complexes z_1 et z_2, solutions de l'équation

$$\sqrt{2}z^2 - (\sqrt{2} + 1 + i)z + (1 + i) = 0.$$

3. Donner la forme exponentielle des nombres complexes z_1 et z_2.
4. Déterminer la forme exponentielle des racines cubiques des nombres complexes z_1 et z_2.
5. En déduire la forme algébrique de tous les nombres complexes z, qui sont solution de l'équation

$$\sqrt{2}z^6 - (\sqrt{2} + 1 + i)z^3 + (1 + i) = 0.$$

Section*Barème
Exercice 1 (4 points)
1) 1 point 2) 0.5 point 3) 0.5 point 4) a) 1 point b) 1 point
Exercice 2 (5.5 points) 1) a) 1.5 points b) 0.5 point 2) 0.5 3) a) 0.5 b) 1 c) 0.5 d) 0.5 4) 0.5
Exercice 3 (5.5 points) 1) 0.5 2) 0.5 3) 0.5+0.5 4) 0.5 5) 1 6) 1 7) 0.5+0.5
Exercice 4 (4 points) 1) 0.5 + 0.5 2) 0.5+0.5 3) 0.25+0.25+0.25 4) 0.25+0.25+0.25 5) 0.5

Exercice 0.1. 1. (1pt) $z^5=1$, $S=\left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$

2. (0.5pt) sur un pentagone pointé sur 1.

3. (0.5pt)$(X-a)(X-\overline{a}) = X^2-(a+\overline{a})+a\overline{a} = X^2-2Re(a)X+|a|^2$

4. (1pt + 1pt) On écrit
$$\begin{aligned}&5\left(X^5-1\right)=5(X-1)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)\\&=5(X-1)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)\left(X-e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)\\&=5(X-1)\left(X^2-2\cos\tfrac{2\pi}{5}X+1\right)\left(X^2-2\cos\tfrac{4\pi}{5}X+1\right)\end{aligned}$$

Exercice 0.2. 1. (1.5pt) On utilise la formule de De Moivre:
$$\begin{aligned}=e^{i5a}\quad&=\cos 5a+i\sin 5a\\&=(\cos a+i\sin a)^5\\&=\cos^5 a+5\cos^4 a\,(i\sin a)^1+10\cos^3 a\,(i\sin a)^2+10\cos^2 a\,(i\sin a)^3+5\cos^1 a\,(i\sin a)^4+(i\sin a)^5\\&=\cos^5 a+5i\cos^4 a\sin a-10\cos^3 a\sin^2 a-10i\cos^2 a\sin^3 a+5\cos a\sin^4 a-i\sin^5 a\end{aligned}$$

Donc
$$\cos 5a=\cos^5 a-10\cos^3 a\sin^2 a+5\cos a\sin^4 a$$

Il vient (0.5pt)
$$\cos 5a=\cos^5 a-10\cos^3 a\left(1-\cos^2 a\right)+5\cos a\left(1-\cos^2 a\right)^2=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$$

2. (0.5pt) Avec $a=\dfrac{\pi}{5}$, on obtient $\cos\pi=16\cos^5\dfrac{\pi}{5}-20\cos^3\dfrac{\pi}{5}+5\cos\dfrac{\pi}{5}$

Or $\cos\pi=-1$ donc $\cos\pi=16\cos^5\dfrac{\pi}{5}-20\cos^3\dfrac{\pi}{5}+5\cos\dfrac{\pi}{5}$+1=0

3. (a) (0.25pt) On a $P(1)=0$ donc 1 est une racine évidente.
   (b) (1pt) $16X^5-20X^3+5X+1=(X+1)\left(16X^4-16X^3-4X^2+4X+1\right)$
   (c) (0.25pt) $16X^4-16X^3-4X^2+4X+1=\left(4X^2-2X+1\right)^2$
   (d) (1pt) On a finalement $16X^5-20X^3+5X+1=(X+1)\left(4X^2-2X-1\right)^2$
   qui est développement en facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
   On résout $4X^2-2X+1$ $\Delta=2^2+4(4)=\left(2\sqrt{5}\right)^2$
   On a donc $x_1=\dfrac{2+2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}=$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

4. (0.5pt) La seule racine postive, comme $\cos\frac{\pi}{5}$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ donc $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 0.3. 1. (0.25pt) On calcule le discriminant: $\Delta = 2^2 - 4(2) = (2i)^2$ donc le polynôme Q est irréductible.

2. (0.5pt) $x_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$ et $x_2 = -1-i$

3. (0.75 pt) Donc $Q(X) = (X+1-i)(X+1+i)$ décomposition sur $\mathbb{C}[X]$ et $Q(X) = X^2+2X+2$ décomposition sur $\mathbb{R}[X]$

4. (0.5pt) On calcule $P(-2) = 0$

5. (1.5pt) On a $P'(X) = 5X^4 + 32X^3 + 78X^2 + 88X + 40$

   et $P'(-2) = 0$

   On a aussi $P"(X) = 20X^3 + 96X^2 + 156X + 88$ et $P"(-2) = 0$

   $P'''(X) = 60X^2 + 192X + 156$ et $P'''(-2) = 12$ donc -2 est de multiplicité 3.

6. (1pt) On calcule $(X+2)^3 = X^3 + 6X^2 + 12X + 8$

   La division euclidienne s'écrit: $X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16 = \left(X^2 + 2X + 2\right)(X+2)^3 + 0$ avec $deg(0) < 3$

7. (1pt) C'est également la décomposition en facteurs premiers de P sur $\mathbb{R}[X]$ car Q est irréductible.

   Sur $\mathbb{C}[X]$, on a $P(X) = (X+2)^3(X+1-i)(X+1+i)$

Exercice 0.4. 1. (1pt) On calcule:

$$w^2 = \left(1-\sqrt{2}+i\right)^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 - 1 + 2i\left(1-\sqrt{2}\right) = 2 - 2\sqrt{2} + i\left(2-2\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\left(1-\sqrt{2}\right)(1+i) = 2\left(\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(2-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

2. (0.5pt) Le discriminant est

$$\Delta = \left(\sqrt{2}+1+i\right)^2 - 4\sqrt{2}(1+i) = 2 + 2\sqrt{2} + i2\left(\sqrt{2}+1\right) - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$
$$= 2 - 2\sqrt{2} + i\left(2-2\sqrt{2}\right) = w^2$$

   (1pt) $z_1 = \frac{\sqrt{2}+1+i-\left(1-\sqrt{2}+i\right)}{2\sqrt{2}} = 1 = e^{i0}$ et $z_1 = \frac{\sqrt{2}+1+i+\left(1-\sqrt{2}+i\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. (1pt) Formes exponentielles ci-dessus.

4. (2pt) On résout $z_1 = \left(re^{i\theta}\right)^3 \Leftrightarrow e^0 = \left(re^{i\theta}\right)^3 \Leftrightarrow r^3 = 1$ et $3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ Les racines cubiques de z_1 sont $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$

   On résout $z_2 = \left(re^{i\theta}\right)^3 \Leftrightarrow e^0 = \left(re^{i\theta}\right)^3 \Leftrightarrow r^3 = 2$ et $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sont $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

5. (1pt) On a les équivalences suivantes:

$\sqrt{2}z^6 - \left(\sqrt{2}+1+i\right)z^3 + (1+i) = 0 \Leftrightarrow Z = z^3$ et $\sqrt{2}Z^3 - \left(\sqrt{2}+1+i\right)Z + (1+i) = 0$
$\Leftrightarrow z_1 = z^3$ ou $z_2 = z^3$

$S = \left\{1, j, j^2, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\} =$
$\left\{1, \sqrt[3]{2}\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi}{12}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\sqrt[3]{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt[3]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i, \sqrt[3]{2}\cos\frac{7\pi}{12} - \sqrt[3]{2}\sin\frac{7\pi}{12}i\right\}$