CY TECH	**Préing 1** **DS 6 analyse**	
	Matière : **Mathématiques - analyse** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Mardi 31 mai 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : (8 pts)

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $(1-x^2)y' - 2xy = 1;$ et $y(0) = 1$, pour tout $x \in]-1, 1[$.
2. $y'' - 6y' + 13y = 29e^{-2x};$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 2 : (3 pts)

1. Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx$.
2. En déduire la limite de la suite : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

Exercice 3 : (6 pts)

I - A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx$, avec $t = x^2$.

II - Calculer la primitive suivante :

$$P = \int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\, dx.$$

Exercice 4 : (5 pts)

1. A l'aide du changement de variable $t = x - \frac{\pi}{2}$, montrer que :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante (on pourra effectuer le changement de variable $t = \cos(x)$) :
$$\int_0^1 \frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}}.$$