	Préing 2 **Devoir Surveillé 3**	
	Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 27 Janvier 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1.

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}y^2 + 2xy + e^x + \sin(2x) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 + xy + x^2 \end{cases}$$

2. Préciser, en justifiant, sur quel domaine ce système est résolvable.

Exercice 2. Soit $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0, y \neq x\Big\}$ et φ le changement de variables de D défini par $\varphi(x,y) = (\dfrac{x}{y}, x-y) = (u,v)$.

1. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme.
2. Trouver f de classe C^1 sur D qui vérifie l'équation suivante :

$$\forall (x,y) \in D, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^4}{x^2+y^2} & : \text{ si } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 & : \text{ si } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire sur la classe de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Soit φ le changement de variables de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = (x+2y, x-ay) = (u,v)$ où $a \in \mathbb{R}\diagdown\{0, \pm 2\}$. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = g \circ \varphi(x,y) = g(u,v)$.

1. Montrer que φ est un C^2-difféomorphisme.
2. Calculer l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en fonction de celles de g et uniquement des variables u et v.
3. Trouver f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation suivante :

$$2a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (2-a)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a+2)^3(x+y).$$