Analyse 2 – DS3 2021/2022

Correction proposée par Mathis S.

Exercice 1 :

1.

$\forall x \in]-1,1[$, le problème se réécrit :

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$a(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$$

$$A(x) = \ln(1-x^2)$$

$$b(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Calculons les solutions de l'équation homogène associée :

Les solutions sont de la forme :

$$y_H = \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-\ln(1-x^2)} = \lambda\left(e^{\ln(1-x^2)}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

$$y_H = \frac{\lambda}{1-x^2}$$

Calculons une solution particulière de cette équation, par variation de la constante :

$$y_P = \frac{\lambda(x)}{1-x^2}$$

$$y_P'(x) = \frac{\lambda'(x)(1-x^2) + 2x\lambda(x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\lambda'(x)}{1-x^2} + \lambda(x)\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$y_P' - \frac{2x}{1-x^2}y_P = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{\lambda'(x)}{1-x^2} + \lambda(x)\frac{2x}{(1-x^2)^2} - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{\lambda(x)}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{\lambda'(x)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\lambda'(x) = 1$$

$$\lambda(x) = x$$

$$y_P = \frac{x}{1-x^2}$$

Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$y_G = y_H + y_P$

$y_G = \dfrac{\lambda + x}{1 - x^2}$

<u>Vérification :</u>

$y'(x) = \dfrac{1 - x^2 + 2x(\lambda + x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{(1 - x^2 + 2\lambda x + 2x^2)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{x^2 + 2\lambda x + 1}{(1 - x^2)^2}$

$(1 - x^2)y' - 2xy = \dfrac{x^2 + 2\lambda x + 1 - 2\lambda x - 2x^2}{1 - x^2} = \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2} = 1$

<u>Résolution du problème de Cauchy</u>

$y(0) = \lambda = 1$

$y = \dfrac{1 + x}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x}$

2.

$y'' - 6y' + 13y = 29e^{-2x}$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

<u>Calculons les solutions de l'équation homogène associée :</u>

$y'' - 6y' + 13y = 0$

Soit $y = e^{rx}, y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}$

$(r^2 - 6r + 13)e^{rx} = 0$

$r^2 - 6r + 13 = 0$

$r^2 - 2(3r) + 9 + 4 = 0$

$(r - 3)^2 = -4$

$r = 3 \pm 2i$

$y = e^{3x}(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$

<u>Calcul d'une solution particulière :</u>

$g(x) = 29e^{-2x}$

$g(x)$ est de la forme $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = -2$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche des solutions de la forme :

$y_P = \delta e^{-2x}$

$y_P' = -2\delta e^{-2x}$

$y_P'' = 4\delta e^{-2x}$

$y_P'' - 6y_P' + 13y_P = 29e^{-2x}$

$e^{-2x}\delta(4+12+13) = 29e^{-2x}$

$29e^{-2x}\delta = 29e^{-2x}$

$\delta = 1$

Donc une solution particulière de l'équation différentielle est $y_P = e^{-2x}$

Détermination de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$y_G = y_H + y_P$

$y_G = e^{3x}(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) + e^{-2x}$

Vérification :

$y_G' = 3e^{3x}(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)) + e^{3x}(2\mu\cos(2x) - 2\lambda\sin(2x)) - 2e^{-2x}$

$y_G' = e^{3x}((3\lambda + 2\mu)\cos(2x) + (3\mu - 2\lambda)\sin(2x)) - 2e^{-2x}$

$$\begin{aligned} y_G'' = {} & 3e^{3x}\big((3\lambda + 2\mu)\cos(2x) + (3\mu - 2\lambda)\sin(2x)\big) \\ & + e^{3x}\big((6\mu - 4\lambda)\cos(2x) - (6\lambda + 4\mu)\sin(2x)\big) + 4e^{-2x} \end{aligned}$$

$y_G'' = e^{3x}\big((5\lambda + 12\mu)\cos(2x) + (5\mu - 12\lambda)\sin(2x)\big) + 4e^{-2x}$

$$\begin{aligned} & y_G'' - 6y_G' + 13y_G \\ & = e^{3x}\big((5\lambda + 12\mu - 18\lambda - 12\mu + 13\lambda)\cos(2x) \\ & + (5\mu - 12\lambda - 18\mu + 12\lambda + 13\mu)\sin(2x)\big) + (4 + 12 + 13)e^{-2x} \\ & = e^{3x}(0\cos(2x) + 0\sin(2x)) + 29e^{-2x} \end{aligned}$$

Résolution du problème de Cauchy

$y(0) = \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$y' = e^{3x}\big((2\mu - 3)\cos(2x) + (3\mu + 2)\sin(2x)\big) - 2e^{-2x}$

$y'(0) = (2\mu - 3) - 2 = 0$

$2\mu = 5$

$\mu = \dfrac{5}{2}$

$y = e^{3x}\left(\dfrac{5}{2}\sin(2x) - \cos(2x)\right) + e^{-2x}$

Exercice 2 :

1.

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

2.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

Par somme de Riemann :

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = I = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3 :

I.1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$$

On pose $u = e^x$

$du = e^x dx$

$$I_1 = \int_1^e \frac{u}{1+u}du = \int_1^e \frac{1+u}{1+u}du - \int_1^e \frac{1}{1+u}du = [u - \ln(1+u)]_1^e = e - \ln(1+e) - 1 + \ln(2)$$
$$= e - 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

I.2.

$$I_2 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

On pose $t = x^2$

$dt = 2x\, dx$

$$x^3 e^{x^2}dx = x^2 e^{x^2}\, xdx = \frac{1}{2}te^t dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt$$

On pose

$u(t) = t, u'(t) = 1$

$v'(t) = e^t, v(t) = e^t$

Par intégration par parties,

$$I_2 = \frac{1}{2}[te^t]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[te^t - e^t]_0^1 = \frac{1}{2}$$

II.

Posons $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$f(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$2x + 1 = \alpha(x+2) + \beta(x+1)$

Avec $x = -1, -1 = \alpha$

Avec $x = -2, -3 = -\beta, \beta = 3$

$f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$

$P = -\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x+2}$

$P = -\ln|x+1| + 3\ln|x+2|$

Exercice 4 :

1.

Utilisons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)} (-dt)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)} dt$$

Donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

2.

$t = \cos(x)$

$dt = -\sin(x)\, dx$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \frac{\pi}{4}$$