Corrigé du DS 3

1. Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{a} E\left(\dfrac{b}{x}\right)$.

Où a, b sont des réels strictement positifs et $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Réponses :

1. $\dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x} = \dfrac{\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x}}\right)} = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ car $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

   On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1$.

2. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$.

   D'où : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$.

3. On sait que pour tout réel y, on a l'encadrement : $y - 1 < E(y) \leqslant y$.

   Appliqué à $y = \dfrac{b}{x}$, on obtient : $\dfrac{b}{x} - 1 < E\left(\dfrac{b}{x}\right) \leqslant \dfrac{b}{x}$.

   Puis : $\dfrac{x}{a}\left(\dfrac{b}{x} - 1\right) < E\left(\dfrac{b}{x}\right) \leqslant \dfrac{x}{a}\dfrac{b}{x} \implies \dfrac{b}{a} - \dfrac{x}{a} < \dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right) \leqslant \dfrac{b}{a}$.

   Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{a} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a}.$$

2. Exercice 2 :

1. Donner la définition exacte, avec les quantificateur, des propositions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell.$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$

2. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+1} = 2.$$

Réponses :

1. a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \ |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in D_f,\ \ x < B \Longrightarrow f(x) > A.$

2. Soit $\epsilon > 0$, on cherche un réel $\alpha > 0$ tel que

$\forall x \in D_f,\ \ |x-1| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$

$$|f(x)-2| < \epsilon \iff |\frac{3x+1}{x+1} - 2| < \epsilon \iff \frac{|x-1|}{|x+1|} < \epsilon.$$

Comme nous cherchons la limite en 1, nous pouvons supposer $x > 0$, ce qui nous donne :

$$x > 0 \Longrightarrow x+1 > 1 \Longrightarrow \frac{1}{x+1} < 1 \Longrightarrow \frac{|x-1|}{x+1} < |x-1|.$$

Pour avoir : $\dfrac{|x-1|}{|x+1|} < \epsilon$, il suffit donc d'avoir : $|x-1| < \epsilon.$

Nous pouvons donc choisir $\alpha = \epsilon$.

En effet : $\forall x > 0,\ |x-1| < \epsilon \Longrightarrow \dfrac{|x-1|}{x+1} < |x-1| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$

3. Problème :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,\ 1], \qquad f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

Première partie :

On considère, dans cette question, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

On pourra, éventuellement dresser le tableau de variation de f_n sur $[0, 1]$.

3. Déterminer la valeur de α_1, solution de $f_1(x) = 0$.

Deuxième partie :

On considère maintenant la suite obtenue dans la question précédente $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Autrement dit : $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite d'éléments de $]0, 1[$ obtenus de la manière suivante :

α_1, solution de $f_1(x) = 0 \iff f_1(\alpha_1) = 0 \iff \alpha_1 - (1-\alpha_1)^2 = 0,$

α_2, solution de $f_2(x) = 0 \Longleftrightarrow f_2(\alpha_2) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_2^2 - (1-\alpha_2)^2 = 0$,

....

α_n, solution de $f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow f_n(\alpha_n) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 = 0$.

....

4. Ecrire sous forme simple factorisée $f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n)$ et en déduire le signe de cette différence.

Rappel : $\alpha_n \in]0,1[$.

5. En déduire le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$, puis que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

6. Justifier la convergence de cette suite.

<u>Troisième partie :</u>

On note ℓ la limite de cette suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = \ell$.

7. Montrer que l'on a forcément : $\ell > 0$.

8. Si on suppose que $0 < \ell < 1$, montrer que l'on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.

On pourra utiliser la forme exponentielle d'une puissance.

9. A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$ montrer que, dans ce cas, on a : $(1-\ell)^2 = 0$.
N'y a-t-il pas une contradiction ?

10. Conclure quant à la seule valeur possible de ℓ.

<u>Réponses :</u>

<u>Première partie :</u>

1. $f_n(x) = x^n - (1-x)^2 = x^n - \left(1 - 2x + x^2\right) = x^n - x^2 + 2x - 1$.

$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2x + 2 = nx^{n-1} - 2(x-1) = nx^{n-1} + 2(1-x)$.

Sur $[0,1[$ on a : $nx^{n-1} \geqslant 0$ et $2(1-x) > 0$.

Donc $f'_n(x) > 0$ et par suite f_n strictement croissante.

2. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$

Le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance stricte de f_n permettent de conclure :

$$\exists! \alpha_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0.$$

3. α_1 est solution de l'équation : $f_1(x) = 0 \Longleftrightarrow x - (1-x)^2 = 0$

$$\Longleftrightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0$$

$\Delta = 9 - 4 = 5$, ce qui donne deux solutions : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$,

et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,38$. Donc $\alpha_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Deuxième partie :

4. On a : $f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n) = {\alpha_n}^{n+1} - (1-\alpha_n)^2 - \left({\alpha_n}^n - (1-\alpha_n)^2\right)$

Puis : $f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n) = {\alpha_n}^{n+1} - {\alpha_n}^n = {\alpha_n}^n(\alpha_n - 1)$

Comme on sait que $\alpha_n \in]0,1[$, on a ${\alpha_n}^n > 0$ et $\alpha_n - 1 < 0$.

Par conséquent : $f_{n+1}(\alpha_n) - f_n(\alpha_n) < 0$.

5. Comme, par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$, on en déduit : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

Nous avons donc, d'une part : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$, et d'autre part : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.

Comme f_n est strictement croissante, on en déduit : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

La suite est croissante (et même strictement croissante).

6. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc convergente vers un réel ℓ.

De plus : $\alpha_n \in]0,1[\implies \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = \ell \in [0,1]$.

Troisième partie :

7. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\alpha_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$; on a donc forcément : $\ell > 0$.

8. Si on suppose que $0 < \ell < 1$, alors comme $\alpha_n^n = e^{n\ln(\alpha_n)}$ et que $\ln(\ell) < 0$, on aura :

$\lim\limits_{x\to+\infty} n\ln(\alpha_n) = -\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.

9. Par construction de la suite, on a : $f_n(\alpha_n) = 0 \iff \alpha_n^n - (1-\alpha_n)^2 = 0$.

En passant à la limite, on obtient donc : $0 - (1-\ell)^2 = 0 \implies \ell = 1$.

D'où la contradiction.

7. On sait que $\ell \in]0,1]$ et que $0 < \ell < 1$ est impossible, par conséquent : $\ell = 1$.