	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année **Devoir surveillé 3** *N. Arancibia, M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 22 janvier 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 heures 30 minutes**
		Nombre de pages : **5**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄⋄⋄

Exercice 1 (Polynomes : 2.5 points)**.**

1. Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\alpha \text{ est une racine de } P(X) \quad \Longleftrightarrow \quad P(X) \text{ est divisible par } (X-\alpha).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

⋄⋄⋄

1. (1 point) La division euclidienne de P par $(X-\alpha)$ s'écrit : $P(X)=(X-\alpha)Q(X)+\lambda$. Ainsi :

$$\alpha \text{ est une racine de } P \Leftrightarrow P(\alpha)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$$

2. (0.5 + 0.5 + 0.5) Soit $P(X)=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$. Alors $P(1)=n-(n+1)+1=0$, donc $(X-1)$ divise P. Ensuite, $P'(X)=n(n+1)X^n-n(n+1)X^{n-1}$, et $P'(1)=n(n+1)-n(n+1)=0$. Donc 1 est une racine double de P et $(X+1)^2$ divise P.

Exercice 2 (Polynomes : 4.5 points)**.**
L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble solution de l'équation :

$$P(X^2)=(X^3+1)P(X) \quad \text{d'inconnue } P \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme X^3-1 sont solutions du problème.
2. Supposons que P soit une solution non nulle de l'équation.
   (a) Montrer que P est de degré 3.
   (b) Démontrer que $P(1)=0$, puis que $P'(0)=P''(0)=0$ (on pourra penser à dériver la relation $P(X^2)=(X^3+1)P(X)$).
   (c) Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X)=\lambda(X^3-1)$.
3. En déduire l'ensemble solution de l'equation.

⋄⋄⋄

1. (0.25 + 0.75) Le polynôme nul ne pose pas de problèmes. Soit $P(X)=X^3-1$, alors $P(X^2)=X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X^3+1)P(X)$.

2. Soit $n \geq 0$ le degré de P.
   (a) (0.5 point) Alors l'équation nous donne $2n = n+3$, d'où $n = 3$.
   (b) (0.5 point) Nous avons dans un premier temps $P(1) = P(1^2) = (1^3+1)P(1) = 2P(1)$. D'où $P(1) = 0$.
   (1point) Ensuite, dérivons une première fois l'équation : $2XP'(X^2) = 3X^2P(X)+(X^3+1)P'(X)$. En évaluant en 0, nous avons $0 = P'(0)$.
   (1point) Dérivons une deuxième fois : $2P'(X^2)+4X^2P''(X^2) = 6XP(X)+3X^2P'(X)+3X^2P'(X)+(X^3+1)P''(X)$. En évaluant en 0, nous avons $2P'(0) = P''(0)$. Dons $P''(0) = 0$.
   (c) (2 points) Nous pouvons poser $P(X) = aX^3+bX^2+cX+d$ et trouver a,b,c,d grâce aux équations précédentes. Ou alors remarquer que 0 est une racine double de $P'(X)$ qui est de degré 2, donc $P'(X) = \alpha X^2$. En intégrant, nous avons $P(X) = \frac{\alpha}{3}X^3+\beta$. Or $P(1) = 0 = \frac{\alpha}{3}+\beta$. Donc $P(X) = \frac{\alpha}{3}(X^3-1) = \lambda(X^3-1)$.
3. (0.5 points) Nous venons de montrer que les seuls solutions non nulles sont de cette forme. Or en généralisant le calcul de la question 1, on montre que tous les polynômes de cette forme sont solutions. Donc toutes les solutions sont le polynôme nul et les polynômes $\lambda(X^3-1)$

Exercice 3 (Division euclidienne : 2.5 points)**.**
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $(X-1)^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : On pourra écrire la division euclidienne puis la dériver.

⋄ ⋄ ⋄

Commençons par écrire la division euclidienne : $P(X) = (X+1)^n = (X-1)^2Q(X)+aX+b$. En dérivant cette égalité (d'après l'indication), nous avons $n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q(X)+(X-1)^2Q'(X)+a$. En évaluant cette dernière égalité en $X = 1$, nous obtenons $a = n2^{n-1}$. En évaluant la première, toujours en 1, nous avons $2^n = a+b$. Donc $b = 2^n-a = 2^n-2^{n-1}n = 2^{n-1}(2-n)$. Ainsi, le reste de la division euclidienne est $2^{n-1}(nX+2-n)$.
(0.5 [div eucli] + 0.5 [dériv] + 0.5 [a] + 0.5 [b] + 0.5 [conclusion])

Remarque, pour $n = 1$, on a bien $(X+1)^1 = (X-1)^2\times 0+X+1$ $(2^{n-1}(nX+2-n = X+1)$. Pour $n = 2$, on a $(X+1)^2 = X^2+2X+1 = X^2-2X+1+4X = (X-1)^2+4X$ $(2^{n-1}(nX+2-n) = 2(2X))$.

Exercice 4 (Polynomes et Fractions rationnelles : 11.5 points)**.**
1. Soit $R(X) = X^8-2X^7-2X^6+3X^5+3X^4-4X^2-X+2$.
   (a) Déterminer des racines de P dans l'ensemble $\{\pm 1; \pm 2; 0; \pm i\}$, ainsi que leurs multiplicités respectives.
   (b) En déduire la factorisation de R dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{4X^6-6X^5-9X^4+10X^3+14X^2-4X+15}{(X-1)^3(X+1)^2(X-2)(X^2+X+1)}$.
   On pose $Q_1(X) = \frac{Q(X)}{(X-1)^3}$, $Q_2(X) = \frac{Q(X)}{(X+1)^2}$, $Q_3(X) = \frac{Q(X)}{(X-2)}$, $Q_4(X) = \frac{Q(X)}{X^2+X+1}$, ainsi que $F_i(X) = \frac{P(X)}{Q_i(X)}$ pour

$i = i, 2, 3, 4$. On donne enfin :

$$F_1'(X) = \frac{4X^9 + 4X^8 - 25X^7 - 51X^6 + 7X^5 + 143X^4 - 33X^3 - 71X^2 + 11X + 8)}{(X^2 + X + 1)^2 (X + 1)^3 (X - 2)^2}$$
$$F_2'(X) = -\frac{10X^8 - 38X^7 + 46X^6 + 6X^5 - 27X^4 + 138X^3 - 214X^2 - 70X - 67)}{(X^2 + X + 1)^2 (X - 1)^4 (X - 2)^2}$$
$$F_3'(X) = -\frac{4X^9 - 8X^8 - 23X^7 + 13X^6 + 68X^5 + 20X^4 + 131X^3 + 147X^2 + 84X - 4)}{(X^2 + X + 1)^2 (X + 1)^3 (X - 1)^4}$$
$$F_4'(X) = -\frac{6X^7 - 12X^6 - 21X^5 + 37X^4 - 18X^3 + 44X^2 - 183X - 37)}{(X + 1)^3 (X - 1)^4 (X - 2)^2}$$
$$F(X + 1) = \frac{24 + 12X - 10X^2 - 6X^3 + 21X^4 + 18X^5 + 4X^6}{X^3(-12 - 12X + 5X^2 + 12X^3 + 6X^4 + X^5)}$$

Déterminer les décompositions en éléments simples de F sur $\mathbb{R}(X)$ puis sur $\mathbb{C}(X)$.

◇◇◇

1. Commençons pas calculer :

$$P'(X) = 8X^7 - 14X^6 - 12X^5 + 15X^4 + 12X^3 - 8X - 1$$
$$P''(X) = 56X^6 - 84X^5 - 60X^4 + 60X^3 + 36X^2 - 8$$
$$P^{(3)}(X) = 336X^5 - 420X^4 - 240X^3 + 180X^2 + 72X$$

(0.5 x 3)

   (a) (1 points) Nous avons $P(1) = P(2) = P(-1) = 0$. Les autres valeurs sont non nulles. Déterminons les multiplicités de ces trois racines :

$$P'(1) = 8 - 14 - 12 + 15 + 12 - 8 - 1 = 0$$
$$P'(-1) = -8 - 14 + 12 + 15 - 12 + 8 - 1 = 0$$
$$P'(2) = 8 \times 2^7 - 7 \times 2^7 - 3 \times 2^7 + 15 \times 16 + 6 \times 16 - 16 - 1 = -2^8 + 20 \times 16 - 1 \text{ est impaire, donc non nul}$$
$$P''(1) = 56 - 84 - 60 + 60 + 36 - 8 = 84 - 84 = 0$$
$$P''(-1) = 56 + 84 - 60 - 60 + 36 - 8 = 140 - 120 + 28 = 48 \neq 0$$
$$P^{(3)}(1) = 336 - 420 - 240 + 180 + 72 = -72 \neq 0$$

   Donc 1 est une racine triple, -1 une racine double et 2 une racine simple. Donc P se factorise par $(X-1)^3(X+1)^2(X-2) = (X^2-1)^2(X^2-3X+2) = X^6 - 3X^5 + 6X^3 - 3X^2 - 3X + 2$. (3 x 1 + 0.5)

   (b) (1 point) Faisons alors la division euclidienne et nous trouvons que le quotient est $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$. Nous avons donc :

$$P(X) = (X-1)^3(X+1)^2(X-2)(X^2+X+1)$$
$$P(X) = (X-1)^3(X+1)^2(X-2)(X-j)(X-j^2)$$

   (0.5 + 0.5)

2. La décomposition s'écrit dans $\mathbb{R}$ (la partie entière est nulle) :

$$F(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)^3} + \frac{e}{X+1} + \frac{f}{(X+1)^2} + \frac{gX+h}{X^2+X+1}$$

Les coefficients a, d et f se trouvent facilement par multiplication évaluation :

$$a = F_3(2) = \frac{2^8 - 3\times 2^6 - 9\times 16 + 80 + 56 - 8 + 15}{1^3\times 3^2\times 7} = \frac{64 - 160 + 16 + 136 + 7}{63} = \frac{143 - 80}{63} = \frac{63}{63} = 1$$
$$d = F_1(1) = \frac{4 - 6 - 9 + 10 + 14 - 4 + 15}{4\times(-1)\times 3} = \frac{24}{-12} = -2$$
$$f = F_2(-1) = \frac{4 + 6 - 9 - 10 + 14 + 4 + 15}{-8\times(-3)\times 1} = \frac{24}{24} = 1$$

Nous pouvons ensuite calculer e :

$$e = F_2'(-1) = -\frac{10 + 38 + 46 - 6 - 27 - 138 - 214 + 70 - 67}{16\times 9} = -\frac{10 - 100 + 40 - 27 - 214 + 3}{144} = -\frac{-50 - 24 - 214}{72}$$
$$= \frac{288}{144} = 2$$

Nous pouvons ensuite utiliser la limite de $XF(X)$ en $+\infty$ pour obtenir :

$$a + b + e + g = 0$$

Soit, $3 + b + g = 0$. Puis la valeur de

$$F(0) = \frac{15}{2} = -\frac{a}{2} - b + c - d + e + f + h = -\frac{1}{2} - b + c + 2 + 2 + 1 + h$$

D'où $-b + c + h = 3$. Pour finir, nous calculons b, c (et d) par la division selon les puissances croissantes. On pose $Y = X - 1$, soit $X = Y + 1$ et

$$(X-1)^3 F(X) = Y^3 F(Y+1) = \frac{24 + 12Y - 10Y^2 + \dots}{-12 - 12Y + 5Y^2 + \dots}$$

Nous avons alors successivement :

$$24 + 12Y - 10Y^2 = -2(-12 - 12Y + 5Y^2 + \dots) - 12Y + \dots$$
$$24 + 12Y - 10Y^2 = (-2 + Y)(-12 - 12Y + 5Y^2 + \dots) + 12Y^2 + \dots$$
$$24 + 12Y - 10Y^2 = (-2 + Y - Y^2)(-12 - 12Y + 5Y^2 + \dots) + \dots$$

On en déduit alors $d = -2$ (on le savait déjà), $c = 1$, $b = -1$. Ce qui nous permet de trouver les coefficients manquants : $g = -3 - b = -2$ et $h = 3 + b - c = 1$. D'où la décomposition sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-2X+1}{X^2+X+1}$$

(0.5 point pas coeff trouvé [donc 4 points])

Pour la décomposition sur $\mathbb{C}(X)$, il suffit alors de décomposer la dernière fraction :

$$\frac{-2X+1}{X^2+X+1} = \frac{k}{X-j} + \frac{\overline{k}}{X-j^2}$$

Par multiplication, évaluation en $X = j$, on obtient

$$k = \frac{-2j+1}{j-j^2} = \frac{1 + 1 - i\sqrt{3}}{2i\,\mathfrak{Im}(j)} = \frac{2 - i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = -1 - \frac{2i\sqrt{3}}{3}$$

La décomposition sur $\mathbb{C}(X)$ est donc :

$$F(X) = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-1 - \frac{2i\sqrt{3}}{3}}{X-j} + \frac{-1 + \frac{2i\sqrt{3}}{3}}{X-j^2}$$

(0.5 point)