Corrigé du DM 3

1. Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x.$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3^3}{x^5-3^5}.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$.

   Où $E(\sqrt{x})$ désigne la partie entière de $\sqrt{x}$.

   Réponses :

1. $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0.$

2. On utilise l'identité remarquable : $\left(a^n - b^n\right) = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

$$\frac{x^3-3^3}{x^5-3^5} = \frac{(x-3)\left(x^2+3x+3^2\right)}{(x-3)\left(x^4+3x^3+3^2x^2+3^3x+3^4\right)} = \frac{x^2+3x+9}{x^4+3x^3+9x^2+27x+81}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3^3}{x^5-3^5} = \dfrac{9+9+9}{81+81+81+81+81} = \dfrac{3\times 9}{5\times 81} = \dfrac{1}{15}.$

3. On sait que $\forall y \in \mathbb{R},\ E(y) \leqslant y$, et que $y \geqslant 0 \implies E(y) \geqslant 0.$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad 0 \leqslant E\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \sqrt{x}.$

Puis que : $\quad 0 \leqslant \dfrac{E\left(\sqrt{x}\right)}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(\sqrt{x})}{x} = 0.$

2. Exercice 2 :

1. Donner la définition exacte, avec les quantificateurs, des propositions suivantes :

   a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty.$

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$

2. Utiliser la définition exacte (avec les quantificateurs) pour prouver que :

$$\lim_{x\to 1} \frac{-3}{5(x-1)^2} = -\infty.$$

Réponses :

1. a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in D_f,\ \ |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < B.$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in D_f,\ \ x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

2. Soit $B < 0$, on cherche un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D_f,\ \ |x-1| < \alpha \Longrightarrow f(x) < B.$

$$f(x) < B \iff \frac{-3}{5(x-1)^2} < B \iff \frac{3}{5(x-1)^2} > -B > 0$$

$$f(x) < B \iff \frac{5(x-1)^2}{3} < \frac{1}{-B} \iff (x-1)^2 < \frac{3}{-5B}$$

$$f(x) < B \iff \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{\frac{-3}{5B}} \iff |x-1| < \sqrt{\frac{-3}{5B}}$$

Nous pouvons donc choisir $\alpha = \sqrt{\dfrac{-3}{5B}}$.

En effet : $\forall x \neq 1,\ |x-1| < \sqrt{\dfrac{-3}{5B}} \Longrightarrow (x-1)^2 < \dfrac{3}{-5B} \Longrightarrow f(x) < B.$

3. Problème :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,\ +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,\ +\infty[, \qquad f_n(x) = e^x + nx^2 - 3.$$

On considère, dans cette question, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1. Montrer que la fonction f_n est strictement croissante .

2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in\ ]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

On pourra, éventuellement dresser le tableau de variation de f_n.

On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $]0, 1[$, définie dans la question précédente. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in\ ]0, 1[, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0.$

4. En déduire le signe de $f_n(\alpha_{n+1})$, puis le sens de variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rappel : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0.$

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell \in [0,1]$.

6. Si on suppose $\ell > 0$, calculer la limite de : $e^{\alpha_n} + n(\alpha_n)^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

7. Conclure quant à la seule valeur possible de ℓ.

Réponses :

1. $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$.

f_n est une somme de fonctions strictement croissantes sur $[0,+\infty[$, donc elle est strictement croissante.

Ou bien : $f'_n(x) = e^x + 2nx > 0$ sur $[0,+\infty[$, donc elle est strictement croissante.

2. $f_n(0) = 1 - 3 = -2 < 0$ et $f_n(1) = e + n - 3 \geqslant e + 1 - 3 > 0$ car $n \geqslant 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance stricte de f_n permettent de conclure :

$$\exists!\alpha_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0.$$

3. $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^x + (n+1)x^2 - 3 - \left(e^x + nx^2 - 3\right) = x^2 > 0.$

4. En choisissant $x = \alpha_{n+1}$, on obtient : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

Comme, par définition, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, on en déduit : $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

Nous avons donc , d'une part : $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$, et d'autre part : $f_n(\alpha_n) = 0$.

Comme f_n est strictement croissante, on en déduit : $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

La suite est décroissante (et même strictement).

5. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers un réel ℓ.

De plus : $\alpha_n \in]0,1[\implies \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = \ell \in [0,1]$.

6. Si on suppose que $\ell > 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha_n} = e^{\ell}$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} n(\alpha_n)^2 = +\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{\alpha_n} + n(\alpha_n)^2 - 3\right) = +\infty$.

Mais : $e^{\alpha_n} + n(\alpha_n)^2 - 3 = f_n(\alpha_n) = 0$ par construction même de la suite.

C'est une expression constante qui a donc pour limite 0.

D'où la contradiction.

7. On sait que $\ell \in [0,1]$ et que $\ell > 0$ est impossible, par conséquent : $\ell = 0$.