	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année **Devoir surveillé 6** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Jeudi 18 juin 2020**
		Durée : **3 heures**
		Nombre de pages : **3**

Toute réponse doit être rigoureusement justifiée et tout calcul détaillé.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème (sur 33) est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M_a.
2. Donner le rang de M_a suivant les valeurs de a.

Exercice 2. (8.5 points)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 - e_2 - e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_3) &= f(e_4) = -e_1 - e_2 - e_4 \end{aligned}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
4. Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer l'endomorphisme $f \circ f$.
6. *Généralisation* : Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$
   (b) $g \circ g = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(g)$

Exercice 3. *Parties stables*
Étant donné un espace vectoriel E, une partie A de E et un endomorphisme f de E, on dit que A est stable par f lorsque $f(A) \subset A$.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE I : UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}^3$ (7.5 points)

Soit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+4y-4z, 2x+2y-z, 2x+3y-2z) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. L'application φ est-elle bijective ? Justifier.
3. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par φ.
4. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
   (b) Montrer que F est stable par φ.
   (c) F et $\mathrm{Ker}(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.

PARTIE II : UN EXEMPLE DANS $\mathbb{R}_2[X]$ (8 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\psi(P) = (2X-1)P - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)P'$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit Q le polynôme donné par $Q(X) = 2X^2 - 1$.
   Calculer $\psi(Q)$ et en déduire que $\mathrm{vect}(Q)$ est stable par ψ.
4. Soit les polynômes R et S donnés par $R(X) = X$ et $S = \psi(R)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (Q, R, S)$ est une base de E.
   (b) Montrer que $\psi(S) \in \mathrm{vect}(R, S)$.
   (c) En déduire la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Montrer que $\mathrm{vect}(R, S)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par ψ.
5. Donner les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
6. Retrouver alors le résultat de la question (4c).

Exercice 4. (6 points) *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE I : CAS DE DIMENSION FINIE

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ y+2z+t &= 0 \end{cases}$$

Soit $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,0,1,0)$ et $v_3=(1,1,0,0)$.
Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, dire s'il est supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$. Justifier.

1. $\mathrm{vect}(v_1, v_2)$.
2. $\mathrm{vect}(v_1, v_3)$.

PARTIE II : CAS DE DIMENSION INFINIE

Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles.
On note f_1 et f_2 les deux éléments de F définis par $f_1(x)=\sin(x)$ et $f_2(x)=\cos(x)$ pour tout $x\in[0,\pi]$.
Soit

$$G=\left\{g\in F,\ g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(\pi)\right\} \quad \text{et} \quad H=\mathrm{vect}(f_1,f_2).$$

1. Soit $f\in F$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ pour que $f-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2$ appartienne à G.
2. En déduire que $F=G\oplus H$.
   On pourra raisonner par analyse-synthèse.